Komplette Mitschriebe zur Linearen Algebra bei Herr Banagl

Michael Stapelberg

Stand: 25.01.2009

Contents

1 Lineare Algebra 1 vom 07.10.2008

1.1 Mengen

endliche Mengen: $\{x_1, x_2, x_3, ...x_n\}$, Ordnung der Elemente irrelevant

$x_i = x_j$ erlaubt

Bsp: $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 1, 2\}$

unendliche Mengen: .

- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$ (natürliche Zahlen)
- $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ (ganze Zahlen)
- $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ (rationale Zahlen)
- $\mathbb{R}$ = Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen (reelle Zahlen)
- $\mathbb{C}$ (komplexe Zahlen)

1.1.1 Widerspruchsbeweis

Angenommen

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}$$

ggt(p,q)=1

Beweis.

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \text{ gerade } \Rightarrow p \text{ gerade } \Rightarrow p = 2m, m \in \mathbb{Z}$$
$$2q^2 = 4m^2$$
$$q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2 \text{ gerade } \Rightarrow q \text{ gerade } \Rightarrow q = 2m, m \in \mathbb{Z}$$

□

1.1.2 Teilmengen

$$A \subset B = \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$
$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$$

1.1.3 Vereinigung

$$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Allgemeiner: $A_i, i \in I$, I ist die Indexmenge (z.B. $I = \{1, 2, 3\}$)

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x | \exists i \in I : x \in A_i\}$$

1.1.4 Durchschnitte

$$A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x | \forall i \in I : x \in A_i\}$$

Beispiel:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n+1}\} = \{0\}$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < \frac{1}{n+1}\} = \emptyset$$

1.1.5 Differenzmenge

$$A \subset B$$

$$B - A := B \setminus A := \{x | x \in B, x \notin A\}$$

1.1.6 Kartesische Produkt

Geordnete Paare (Reihenfolge relevant): $a, a' \in A$, $b, b' \in B$

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$$

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Beispiel:

$$\{a, b, c\} \times \{1, 2\}$$
$$= \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$$

Beispiel 2:
$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, eine zweidimensionale Ebene

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

1.1.7 Abbildungen

Seien X, Y Mengen

Definition 1.1. Eine Abbildung f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem Element x von X genau ein Element $f(x)$ von Y zuordnet.

Schreibweisen:

$$f : X \to Y$$
$$x \mapsto f(x)$$

$f(x)$ ist das Bild von x unter f, X heißt Definitionsbereich von f, y heißt Wertebereich von f

Definition 1.2. $f(X) := \{f(x)|x \in X\}$ heißt Bild von f

$B \subset Y$, $f^{-1}(B) := \{x \in X|f(x) \in B\}$ ist das Urbild von B unter f

2 Lineare Algebra 1 vom 09.10.2008

2.1 Abbildungen

$f : X \to Y$

Definition 2.1. f ist **surjektiv**, wenn $f(X) = Y$ (wenn jeder Wert auch als Bild auftritt)

Definition 2.2. f ist **injektiv**, wenn $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (zwei verschiedene Werte müssen auf zwei verschiedene Bilder abgebildet werden)

Definition 2.3. f ist **bijektiv** (eine Bijektion), wenn f surjektiv und injektiv ist.

Beispiele:

- $$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$$
  $$x_1 \mapsto y_1$$
  $$x_2 \mapsto y_1$$
  $$x_3 \mapsto y_3$$
  $$x_4 \mapsto y_4$$
  $\Rightarrow$ nicht surjektiv (y_2 ist nicht zugeordnet), nicht injektiv
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ f(x) = x^2$
  $\to$ nicht surjektiv, nicht injektiv
- $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ (ist dasselbe wie $\{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0\}$)
  $\to$ nicht surjektiv, aber injektiv
- $x : [0, \infty) \to [0, \infty)$
  $\to$ Bijektion
- Die Identitätsabbildung auf $X \to X$, nämlich $id(x) = x \, \forall x \in X$ ist immer eine Bijektion.

Sei $f : X \to Y$ eine Bijektion.

$$y \in Y. f^{-1}(\{y\}) = \{x\}, x \in X$$

Wir setzen

$$f^{-1}(u) := x$$

und erhalten so eine Abbildung $f^{-1} : Y \to X$
f^{-1} heißt die Umkehrabbildung von f

2.2 Die Komposition (Zusammensetzung) von Abbildungen

$$f : X \to Y, g : Y \to Z$$

Definitionsbereich der zweiten Funktion muss dem Wertebereich der ersten entsprechen, sonst kann man die Funktionen nicht zusammensetzen.

Definition 2.4.

$$g = f : X \to Y$$

$$(g \circ f)(x) \coloneqq g(f(x))$$

= ist assoziativ, jedoch nicht kommutativ: $f \circ g \neq g \circ f$, Beispiel:

$$f(x) = x^2, g(x) = x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$$

$$f : X \xrightarrow{Bij} Y, Y \xrightarrow{f^{-1}} X$$

$$f^{-1} \circ f = id_x, f \circ f^{-1} = id_y$$

2.3 Gruppe

$$(\mathbb{Z}, +), + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

(d.h., Plus ist eine Abbildung)
+ ist assoziativ, kommutativ.
$\exists$ Element $0 \in \mathbb{Z}$ (neutrales Element)
$\forall n \in \mathbb{Z} \exists -n \in \mathbb{Z}$ sodass $n + (-n) = 0 = (-n) + n$ (inverses Element)

Sei M eine Menge.

$$S(M) \coloneqq \{f : M \to M | f \text{ Bijektiv}\}$$

"Symmetrien" von M.

$$(S(M), \cdot) : \cdot : S(M) \times S(M) \to S(M)$$

$\cdot$ ist assoziativ, nicht kommutativ
id_M (Identität) ist ein neutrales Element: $f \cdot \mathrm{id}_M = f = \mathrm{id}_M \cdot f$

Definition 2.5. Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \cdot)$, wobei G eine Menge ist, $\cdot : G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$, sodass gilt:

1. $\cdot$ ist assoziativ: $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$

2. $\exists e \in G : \forall g \in G : g \cdot e = g = e \cdot g$ (neutrales Element)
3. $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G : g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g$ (inverses Element)

Bemerkung 2.6. *1. e ist eindeutig: Angenommen, e' ist auch neutral. $\Rightarrow e = e \cdot e' = e'$*

2. Die Forderung $g^{-1} \cdot g = e$ ist redundant: $y := g^{-1} \cdot g = g^{-1} \cdot e \cdot g = g^{-1} \cdot (g \cdot g^{-1}) \cdot g = (g^{-1}g) \cdot (g^{-1}g) = y \cdot y = y^2$
$e = yy^{-1} = y^2y^{-1} = y \cdot (yy^{-1}) = y \cdot e = y = g^{-1} \cdot g$

3. Für gegebenes g ist auch g^{-1} eindeutig: Angenommen, g^{-1}, g' sind beide invers zu g:
$gg' = e = gg^{-1}$
$g^{-1}gg' = g^{-1}gg^{-1} \Rightarrow g' = g^{-1}$

4. Auch $g = e \cdot g$ redundant

5. $(ab)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ (multiplizieren und Reihenfolge umdrehen)

Beispiele:
$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe
$(S(M), \cdot)$ ist eine Gruppe
$(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), \mathbb{Q}* = \mathbb{Q} - \{0\}, (\mathbb{Q}*, \cdot)$ Gruppe

Terminologie: Eine Gruppe heißt abelsch, wenn die $\cdot$-Operation kommutativ ist ($g \cdot h = h \cdot g \forall g, h \in G$).

2.4 Körper

Definition 2.7. Ein Körper ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$, wobei K eine Menge ist, $+$ eine Abbildung $K \times K \to K$, ebenso $\cdot : K \times K \to K$, sodass:

1. $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe, genannt additive Gruppe des Körpers ($(K, \cdot)$ ist die multiplikative Gruppe)

2. $\cdot$ lässt sich einschränken zu einer Abb. $\cdot K^* \times K^* \to K^*$ mit $K^* = K - \{0\}$, $(K^*, +)$ ist eine abelsche Gruppe

3. Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c)$ $\forall a, b, c, \in K$

Beispiel: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
Notation: $(K, +, \cdot)$: 0 := = neutrales Element für l+
1 := = neutrales Element für $\cdot$
$-a$:= inverses Element zu a bzgl $+$
a^{-1} := inverses Element zu a bzgl $\cdot$ $(a \neq 0)$
$a - b := a + (-b)$
$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}(b \neq 0)$

Bemerkungen:

1. $(a \cdot 0) = 0$, Beweis: $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, $-(a \cdot 0) + (a \cdot 0) = -(a \cdot 0) + a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow 0 = 0 + a \cdot 0$

3 Lineare Algebra 1 vom 14.10.2008

$(K, +, \cdot)$ Körper

Bem.: Ein Körper hat immer min. zwei Elemente (0 und 1).

3.0.1 Rechenregeln

- $a \cdot 0 = 0$
  $0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$
  $(-a0) + a0 = -a0 + a0 + a0 = a0$

- Nullteilerfreiheit: Ist $a \cdot b = 0$, dann $a = 0$ oder $b = 0$
  Beweis: $a \cdot b = 0$. Wenn $a = 0$, fertig. Sei $a \neq 0 \Rightarrow a \in K^* \Rightarrow \exists a^{-1} \in K^*$
  $0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b$

- $-(a \cdot b) = a \cdot (-b)$ $a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$

3.0.2 Beispiele

$\mathbb{Q}(\mathbb{Q}, +, \cdot), \mathbb{R}(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper:
$1 \in \mathbb{Z}$ muss das multiplikative neutrale Element sein. $2 \in \mathbb{Z}^*$. $2n = 1$. Gleichung nicht lösbar $\Rightarrow$ kein Körper

Körperstruktur auf $\mathbb{R}^2$:

$$+ : (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_2, x_2 + y_3) >$$

$(\mathbb{R}^2, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Neutrales Element ist $(0, 0)$. Inverses Element ist $-(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) := (x_1 y_1 d - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$(x_1, x_2) \cdot (1, 0) = (x_1, x_2) \Rightarrow 1 = (1, 0)$$

$$(x_1, x_2)^{-1} = (\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2})$$

$$(x_1, x_2) \cdot (\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2})$$

$$= (\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{-x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{-x_1 x_2 + x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}) = (1, 0)$$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ist ein Körper

Definition 3.1. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ist der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Definition 3.2. $i := (0, 1)$ (imaginäre Einheit)

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} : x \mapsto (x, 0)$$

$$x_1 + ix_2 (x_1, x_2 \in \mathbb{R}) = (x_1, 0) + (0, 1) \cdot (x_2, 0) = (x_1, 0) + (0, x_2) = (x_1, x_2)$$

kunjugiert komplexe Zahlen: $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$, dann $\overline{Z} := x_1 - ix_2$

Definition 3.3. $\mathrm{Re}(x_1 + ix_2) = x_1$ (Realteil), $\mathrm{Im}(x_1 + ix_2) = x_2$ (Imaginärteil)

Es gilt: $z + w = \overline{z} + \overline{w} (z, w \in \mathbb{C})$ und $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

$$z \cdot \overline{z} = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Definition 3.4. $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

3.0.3 Körper mit genau 2 Elementen

Der Körper F_2 mit 2 Elementen: $F_2 = \{0, 1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Zu jeder Primzahl p existiert ein Körper F_p mit p Elementen.

3.1 Vektorraum

Definition 3.5. Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$, wobei V eine Menge ist.
$+ : V \times V \to V$, geschrieben $(v, w) \mapsto v + w$
$\cdot : K \times V \to V$, geschrieben $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$
sodass:

1. $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
2. $\forall \lambda, \mu \in K$ (griechische Buchstaben für Körper-Elemente) und $v, w \in V$ (Vektorraumelemente):
   $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
3. $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$

4. $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
5. $1 \cdot v = v$

Vorsicht: $\cdot$ mit Elementen aus K ist das $\cdot$ in K, ansonsten ist es $\cdot$ in V. Ebenso für $+$.

Terminologie:

- Die Elemente von V heißen Vektoren.
- Die Multiplikation $\cdot : K \times V \to V$ heißt Skalarmultiplikation
- K heißt Skalarkörper

Beispiele:

$$V := K^n := K \times K \times K ... \times K$$
$$(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in K^n$$
$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$
$$\lambda \in K : \lambda \cdot x := (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

$\Rightarrow (K^n, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum (VR), genauer gesagt ein K-Vektorraum

$$(\mathbb{R}^n, +, \cdot), (\mathbb{C}^n, +, \cdot)$$

Andere Vektorräume: Wir betrachten zwei reelle Zahlen $a < b$:

$$\mathscr{C}[a, b] := \{f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} | f \text{stetig}\} (K = \mathbb{R})$$
$$+ : (f + g)(x) := f(x) + g(x), 0$$
$$\cdot : (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \in \mathbb{R} (\lambda \in \mathbb{R})$$

$f + g, \lambda \cdot f$ sind stetig.
$\Rightarrow (\mathscr{C}[a, b], +, \cdot)$ ist im $\mathbb{R}$-VR.

$$V := \{\text{Alle Polynome p mit reellen Koeffizienten und Grad} \leqslant 3\}$$

$p, q \in V : p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, ebenso $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$

$$(p + q)(x) := p(x) + q(x)$$

$$(p + q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot x + (a_2 + b_2) x^2 + (a_3 b_3) x^3$$
$$\lambda \cdot p = (\lambda a_0) + (\lambda a_1) x + (\lambda a_2) x^2 + (\lambda a_3) x^3$$

Alle Lösungen der Differenzialgleichung $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$ bilden einen Vektorraum.
Seien y_1, y_2 Lösungen, so gilt:

$$\frac{d^2(y_1 + y_2)}{dt^2} + (y_1 + y_2) = \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{d^2 y_2}{dt^2} + y_1 + y_2 = (\frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1) + (\frac{d^2 y_2}{dt^2} + y_2) = 0$$

Ebenso verhält es sich mit dem Skalarprodukt:

$$\lambda \in \mathbb{R}. \frac{d^2(\lambda y_1)}{dt^2} + (\lambda y_1) = \lambda \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \lambda y_1 = \lambda \cdot (\frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1) = \lambda 0 = 0$$

Beispiele für Lösungen:

$$y_1 = \sin(t)$$

$$y_2 = \cos(t)$$

$\Rightarrow \lambda \sin(t) + \mu \cos(t)$ Lösungen $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

4 Lineare Algebra 1 vom 16.10.2008

4.1 Vollständige Induktion

Seien $A(n)$ Aussagen, die von einer natürlichen Zahl n abhängen.
$A(0)$ und $(\forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Rightarrow A(n+1))) \Rightarrow (\forall n \in N; A(n))$
Beispiel:

$$A(n) = n^2 - 2n + 1 \geqslant 0^n$$

Induktionsanfang:

$$A(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 \geqslant 0$$

Induktionsannahme: $n^2 - 2n + 1 \geqslant 0$ gilt

Induktionsschritt (zeigen, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt):

$$(n-1)^2 - 2(n+1) + 1 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (n^2 + 2n + 1) - 2n - 2 + 1 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (n^2 - 2n + 1) + (2n - 1) \geqslant 0$$

Aus der Annahme wissen wir, dass $(n^2 - 2n + 1) \geqslant 0$. Der einzige Fall, bei dem der Ausdruck nun nicht $\geqslant 0$ sein kann, ist $n = 0$, den haben wir aber vorhin schon behandelt.

4.2 Untervektorräume

Sei V ein K-Vektorraum.

Definition 4.1. Sei $W \subset V$ eine Teilmenge. W heißt Untervektorraum (UVR) von V, wenn gilt:

1. $0 \in W$
2. $\forall v, w \in V : v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$ (abgeschlossen bezüglich der Addition)
3. $\forall v \in V : v \in W \Rightarrow \lambda v \in W \forall \lambda \in K$ (abgeschlossen bezüglich der Skalarmultiplikation)

$(W, +, \cdot)$ ist wieder ein K-Vektorraum. Geometrisch gesehen ist ein Untervektorraum eine Gerade, die durch den Ursprung geht (da er immer den 0-Vektor enthält).

Beispiel: $\{0\} \subset V$ und $V \subset V$ ist ein Untervektorraum.

$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$. Wähle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Setze $W := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \lambda x_1 + \mu x_2 = 0\} \subset V$. Behauptung: W ist ein Untervektorraum.

Beweis.

1. Zu zeigen:
$$0 \in W$$
$$(x_1, x_2) = (0, 0) = 0$$
$$\lambda 0 + \mu 0 = 0 \Rightarrow (0, 0) \in W$$

2. Zu zeigen: $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in W \Rightarrow (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \in W$:
$$\lambda(x_1 + y_1) + \mu(x_2 + y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) = 0 + 0 = 0$$
(wegen der Definition von W)

3. Zu zeigen:
$$\lambda' \in \mathbb{R}, (x_1, x_2) \in W \to \lambda'(x_1, x_2) \in W : (\lambda' x_1, \lambda' x_2)$$
$$\lambda(\lambda' x_1) + \mu(\lambda' x_2) = \lambda'(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda' \cdot 0 = 0$$

□

$\Rightarrow W \subset V$ ist ein Untervektorraum.

Sei V ein K-Vektorraum. Sei $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ eine Teilmenge.

$$W := \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k | \lambda_i \in K \forall i\}$$

(eine solche Summe nennt man Linearkombination der Vektoren v_1 bis v_k)
Für diesen Ausdruck schreibt man auch gern:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

$W \subset V$ ein Untervektorraum.

Definition 4.2. $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle := W$ ist der von den Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ aufgespannte Untervektorraum

z.B.: $V = \mathbb{R}^3$. $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle = x_1, x_2$-Ebene. oder $\langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle = x_2 x_3$-Ebene.

Beispiel:
$$\mathscr{C}(a, b)$$
$$\mathscr{C}^1(a, b) := \{f \in \mathscr{C}(a, b) | f \text{differenzierbar}\}$$

(z.B. $|x|$ ist nicht differenzierbar (=ableitbar) in Punkt 0)
$\mathscr{C}^1 \subset \mathscr{C}$ ist ein Untervektorraum.

Beweis.

1. 0 muss in $\mathscr{C}^1$ liegen:
$$0 \in \mathscr{C}^1$$
2. Liegt auch die Summe in $\mathscr{C}^1$?
$$f, g \text{ differenzierbar} \Rightarrow f + g \text{ differenzierbar}$$
3. Liegt auch das Produkt in $\mathscr{C}^1$?
$$\lambda \in \mathbb{R}, f \text{ differenzierbar} \Rightarrow \lambda f \text{ differenzierbar}$$

□

$\mathscr{C}^2$ alle Funktionen, die stetig sind und zweimal differenzierbar sind (die Stammfunktion der Betragsfunktion ist einmal differenzierbar, aber nicht zweimal).

$$\ldots \mathscr{C}^3 \subset \mathscr{C}^2 \subset \mathscr{C}^1$$

Lemma 4.3. *Seien $W_i \subset V$ Untervektorräume, $i \in I$, dann ist $\bigcap_{i \in I} W_i \subset V$ ein Untervektorraum.*

Beweis.
$$0 \in W_i \forall i \Rightarrow 0 \in \cap W_i$$
Zu zeigen: $v + w \in \cap W_i$ $v, w \in \cap W_i$ heißt $v, w \in W_i \forall i \Rightarrow v + w \in W_i \forall i \Rightarrow v + w \in \cap W_i$
$v \in \cap W_i, \lambda \in K$. Zu zeigen: $\lambda \cdot v \in \cap W_i$

$$\Rightarrow v \in W_i \forall i \Rightarrow \lambda v \in W_i \forall i$$

□

Vorsicht: Dies gilt nicht für die Vereinigung!
W_1, W_2UVR $\Rightarrow W_1 \cup W_2$ kein UVR (im Allgemeinen)
Beispiel:
$V = \mathbb{R}^2$, x-Achse als W_1, y-Achse als W_2, wenn man sich jetzt einen Punkt w und v auf W_2 bzw W_1 nimmt, so ist die Vereinigung das Kreuz auf der Achse, $v + w$ jedoch liegt außerhalb.

Lemma 4.4. *Sei $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ und $W \subset V$ ein UVR mit $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset W$, dann gilt $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle \subset W$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jede Linearkombination $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ in W liegt.

$$v_1 \in W \overset{W \text{ UVR}}{\Rightarrow} \lambda_1 v_1 \in W$$

$$v_2 \in W \Rightarrow \lambda_w v_2 \in W$$

$$v_k \in W \Rightarrow \lambda_k v_k \in W$$

Da ein Untervektorraum abgeschlossen ist bezüglich der Addition:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W$$

usw.:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k \in W$$

Folgerung:

$$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \cap \{W \subset V | \{v_1, \ldots, v_k\} \subset W\}$$

(Der aufgespannte Teilraum ist der kleinste Untervektorraum, der die Vektoren v_1 bis v_k enthält) □

4.3 linear unabhängig

Definition 4.5. Eine Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ (V ist ein K-Vektorraum) heißt linear unabhängig (l.u.), wenn:

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K : \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall 1 \leqslant i \leqslant k$$

Beispiel:
$V = K^1 . \{v_1\} = \{0\}$ ist linear abhängig (l.a.), d.h. nicht linear unabhängig.
$1 \cdot v_1 = 1 \cdot 0 = 0$, aber $\lambda_1 = 1 \neq 0$

Beispiel 2:
$V = \mathbb{R}^2, \{v_1\} = \{(2,3)\}$. $\lambda_i(2,3) = 0$. $(2\lambda_1, 3\lambda_1) = (0,0) \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \{(2,3)\}$ linear unabhängig.

Beispiel 3:
V im beliebigen K-Vektorraum. $\{v\}, v \neq 0$ ist immer linear unabhängig:
$\lambda \cdot v = 0$. Angenommen die Menge wäre linear abhängig, so $\lambda \neq 0 . \exists \lambda^{-1}$

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^{-1} \cdot 0 = 0$$

$$(\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot v = 1 \cdot v = v ↯$$

Beispiel 4:
$V = \mathbb{R}^2 . \{(2,3), (4,6)\}$ ist linear abhängig.

$$1 \cdot (4,6) + (-2) \cdot (2,3) = (0,0)$$

entspricht:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = 0$$

Da $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ ist V linear abhängig.

Geometrisch gesehen liegen in $\langle(2,3),(4,6)\rangle$ die Punkte $(2,3)$ und $(4,6)$ auf einer Gerade.

Beispiel 5:
$\{(2,3),(0,1)\}$ ist linear unabhängig.

$$\lambda \cdot (2,3) + \mu(0,1) = (0,0)$$

$$2\lambda + 0\mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$1\lambda + 1\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

$\langle(2,3),(0,1)\rangle = \mathbb{R}^2$

Bemerkung 1: Eine beliebige Teilmenge $S \subset V$ ist linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von S linear unabhängig ist.
Bemerkung 2: $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ mit $v_i = 0$ für irgendein i. $\Rightarrow$ linear abhängig, da $1 \cdot v_i = 0$
Bemerkung 3: $v_1, \ldots, v_k$ und $v_i = v_j$ für $i \neq j$, dann ist diese Liste linear abhängig, da $1 \cdot v_i + (-1) \cdot v_j = 0$
Bemerkung 4: $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ist linear abhängig $\Leftrightarrow \exists i : v_i = \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_{i-1} v_i - 1 + \lambda_{i+1} \cdot v_{i+1} \ldots \lambda_k \cdot v_k$
Es existiert eine Linearkombination, sodass $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$, nicht alle

$$\lambda_i = 0 \Rightarrow \exists i_0 \lambda_{i0} \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda_{i0}^{-1} \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_0} v_i + \frac{\lambda_{i01}}{\lambda i0 \cdot \lambda_{i0-1} + v_{i0}} + \frac{\lambda_{i0+1}}{\lambda_{i0}} v_{i0+1} = 0$$

5 Lineare Algebra 1 vom 21.10.2008

Sei V ein K-Vektorraum, K ein Körper

Definition 5.1. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_r \in V$ sind linear unabhängig (l.u.), wenn:

$$\sum_{i=1} r\lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i$$

Bsp. $K^n = V$

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in K^n$$

$\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ l.u.

$$0 = \sum \lambda e_i = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i$$

$$V = \mathbb{R}[t] := \{\text{alle Polynome in der Variablen t mit reellen Koeffizienten}\}$$

$\{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$ l.u.

$$p(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \cdots + \lambda_n t^n = 0 \forall t$$

$$p(0) = \lambda_0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$$

$$p'(t) = \lambda_i \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

etc. $\Rightarrow \lambda_n = 0$

Proposition 5.2.

$$\{v_1, \ldots, v_n\} l.u. \Leftrightarrow \forall v \in < v_1, \ldots, v_n >: \exists! \lambda_1, \ldots, \lambda_n : \sum \lambda_i v_i = v$$

Beweis. Existenz der λ_i ist klar, es geht nur um die Eindeutigkeit: $\sum \lambda_i v_i = v = \sum \mu_i v_i \Rightarrow \sum(\lambda_i - \mu_i)v_i = 0$, wir wollen zeigen, dass $\lambda_i = \mu_i$. Da linear unabhängig:

$$\Rightarrow \lambda_i - \mu_i = 0 \forall i \Rightarrow \lambda_i = \mu_i$$

Andere Richtung:

$$\forall \lambda_i v_i = 0 = \sum 0 v_i$$

Eindeutigkeit der Koeffizienten wird vorausgesetzt, daher: $\Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i$ □

Definition 5.3. $\{v_i i\}_{i \in I}$ heißt Erzeugendensystem von V, wenn $< \{v_i\}_{i \in I} >= V$ (Jeder Vektorraum V lässt sich durch eine Linearkombination dieser v_i darstellen).

Definition 5.4. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V heißt Basis von V.

Bsp.: $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist eine Basis für K^n, die sogenannte kanonische Basis.
$\{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$ ist eine Basis für $\mathbb{R}[t]$

Proposition 5.5. *$\{v_i\}_{i\in I}$ ist eine Basis.*
$\Leftrightarrow$ $\{v_i\}$ ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem (unverkürzbares = wenn ich einen Vektor wegnehme, dann existieren Vektoren die ich nicht mehr durch Linearkombination der Verbleibenden darstellen kann)
$\Leftrightarrow$ $\{v_i\}$ ist eine unverlängerbare l.u. Menge (unverlängerbar = wenn man einen Vektor dazugibt, wird die Menge plötzlich linear abhängig)

Beweis.

- $(1) \Rightarrow (2)$: $\{v_i\}$ unverkürzbar: $\{v_i\}_{i\neq i_0}$ (zu zeigen: ist kein Erzeugendensystem)

  $$v_{i_0} = \sum_{i\neq i_0} \lambda_i v_i$$

  Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der $\{v_i\}_{i\in I}$

- $(2) \Rightarrow (3)$:
  1.: lineare Unabhängigkeit: $\sum \lambda_i v_i = 0$
  Widerspruchsbeweis:

  $$\exists i_0 : \lambda_{i_0} \neq 0$$
  $$\lambda_{i_0} v_{i_0} = -\sum_{i\neq i_0} \lambda_i v_i$$
  $$v_{i_0} = -\sum_{i\neq i_0} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} v_i$$

  Widerspruch zur Unverkürzbarkeit der Menge $\{v_i\}_{i\in I}$.
  2.: unverlängerbar:
  Angenommen: $\{v_i\}_{i\in I} \cup \{v\}$ l.u.
  $1v = \sum \lambda_i v_i$, da $\{v_i\}_{i\in I}$ Erzeugendensystem
  $1v - \sum \lambda_i v_i = 0$, Widerspruch zu $\{v_i\}_{i\in I} \cup \{v\}$ l.u.

- $(3) \Rightarrow (1)$:
  Zu zeigen: $\{v_i\}_{i\in I}$ sind ein Erzeugendensystem. Sei $v \in V$. $\{v_i\}$ unverlängerbar $\Rightarrow$ $\{v_i\} \cup \{v\}$ linear abhängig.
  $\exists \sum \lambda_i v_i + \lambda v = 0$, nicht alle der Koeffizienten $\lambda_i \lambda = 0$. $\Rightarrow \lambda \neq 0$

  $$\lambda v = -\sum \lambda_i v_i$$
  $$v = -\sum \frac{\lambda_i}{\lambda} v_i$$

  $\Rightarrow$ ist ein Erzeugendensystem, da man einen beliebigen Vektor v als Linearkombination darstellen kann.

□

Sei V endlich erzeugt (= es existiert ein Erzeugendensystem, das endlich viele Vektoren hat). Wir wollen zeigen, dass je zwei Basen für V die gleiche Anzahl von Elementen besitzen. Dazu benutzen wir das Austauschverfahren von Steintz.

Lemma 5.6. *Austauschlemma: Sei $\{v_1, \dots, v_r\}$ eine Basis von V, $w \in V$, $w = \sum \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_j \neq 0$ dann ist die Menge $\{v_1, \dots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots, v_r\}$ wieder eine Basis.*

Beweis.

1. lineare Unabhängigkeit:
   OBdA dürfen wir annehmen, dass $j = 1$.

$$\mu w + \sum_{i \geqslant 2} \mu_i v_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{r} \mu \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{r} \mu_i v_i = 0$$

$$(\mu\lambda_1)v_1 + (\mu\lambda_2 + \mu_2)v)2 + \cdots + (\mu\lambda_r + \mu_r)v_r = 0$$

$$\{v_1, \dots, v_r\} \text{l.u.} \Rightarrow \mu\lambda_1 = 0$$

   Da $\lambda_1 \neq 0$, muss $\mu = 0$

$$\mu\lambda_2 + \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0$$

2. Erzeugendensystem:
   Sei $v \in V$.

$$\exists \sum \mu_i v_i = v$$

$$\mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{r} \mu_i v_i = v$$

$$w = \lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{r} \lambda_i v_i$$

$$\lambda_1 v_1 = w - \sum_{i \geqslant 2} \lambda_i v_i$$

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w - \sum_{i \geqslant 2} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v_i$$

$$\mu_1 \cdot (\frac{1}{\lambda_1} w - \sum_{i \geqslant 2} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v_i) + \sum_{i \geqslant 2} \lambda_i v_i = v$$

   Wir haben eine Linearkombination, in der v_1 nicht mehr vorkommt, sodass wir jeden Vektor als Linearkombination der anderen darstellen können.

□

5.1 Austauschsatz

Austauschsatz: Jede linear unabhängige Menge lässt sich in einer Basis einbauen, nachdem geeignete Basisvektoren aus der Basis entfernt wurden.
Genauer: Sei $\{v_1, \ldots, v_r\}$ eine Basis für V, $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine linear unabhängige Menge.
Dann gilt:

1. $n \leqslant r$
2. $\exists i_1, i_2, \ldots, i_n : \{v_1, \ldots, v_{i_1-1}, w, v_{i_1+1}, v_{i_2-1}, w_2, v_{i_2+1}, \ldots, v_{i_n-1}, w_n, w_{i_n+1}, \ldots, v_r\}$ ist eine Basis. OBdA $i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_n = n$

Beweis. Induktion nach n:
$n = 1$: Austauschlemma.
$n \geqslant 2$: Induktionsannahme:

1. $n - 1 \leqslant r$
2. $\{w_1, \ldots, w_{n-1}, v_n, \ldots, v_r\}$ ist eine Basis

Angenommen $n - 1 = r \Rightarrow \{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ Basis, also eine unverlängerbare linear unabhängige Menge.
Widerspruch zu $\{w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n\}$ eine linear unabhängige Menge ist.

$$\Rightarrow n - q < r \Rightarrow n = (n-1) + 1 \leqslant r$$

Zu zeigen: $\{w_1, \ldots, w_n, v_{n+1}, \ldots, v_r\}$ ist eine Basis.

$$w_n = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{n-1}, w_{n-1} + \lambda_n v_n + \cdots + \lambda_r v_r$$

Wären $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_r = 0$, dann $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{n-1} w_{n-1} - w_n = 0$.
Widerspruch zu $\{w_1, \ldots, w_n\}$ linear unabhängig

$$\Rightarrow \exists j \geqslant n : \lambda_j \neq 0$$

Wende das Austauschlemma auf $v_j \leftrightarrow w_n$ an. $\Rightarrow \{w_1, \ldots, w_{n-1}, v_n, .., v_{j-1}, w_n, v_{j+1}, \ldots, v_r\}$ Basis. □

Korrolar 5.7. *Je zwei Basen von V (endlich erzeugt) haben gleich viele Elemente.*

Beweis. Seien $\{v_1, \ldots, v_r\}, \{w_1, \ldots, w_n\}$ Basen für V.
Austauschsatz $\Rightarrow n \leqslant r, r \leqslant n$.

$$\Rightarrow n = r$$

□

6 Lineare Algebra 1 vom 23.10.2008

6.1 Die Dimension eines Vektorraums

Korrolar 6.1. *Hat V eine endliche Basis, dann ist jede Basis von V endlich.*

Korrolar 6.2. *Sei V endlich erzeugt. Je zwei Basen haben gleich viele Elemente.*

Definition 6.3. Sei V ein K-Vektorraum.
$\dim_K V := \infty$, wenn V keine endliche Basis besitzt
$\dim_K V := r$, wenn V eine Basis mit r Elementen hat.
(Konvention: $V = \{0\} \Rightarrow$ Basis = $\emptyset$.)

Beispiele: K^n: Basis $\{e_1, ..., e_n\}$ (kanonische Basis) $\Rightarrow \dim(K^n) = n$

$V = \mathbb{R}[t]$: Basis $\{1, t, t^2, ...\} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}[t]) = \infty$

$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$. wenn wir nur $\mathbb{R}$ betrachten: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$, da Basis: $\{e, ie, e_2, ie_2, ..., e_n, ie_n\}$
z.B. $n = 2$, Vektor $(3 + 5i, 2 + 18i) = 3e_1 + 5ie_1 + 3e_2 + 2e_2 + 18ie_2 = 3(1, 0) + 5(i, 0) + 2(0, 1) + 18(0, i)$

$$V = \{y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | \frac{d^2y}{dt^2} + y = 0\}$$

Basis: $\{\sin t, \cos t\}$
l.u.: $\lambda \sin t + \mu \cos t = 0 \forall t$
Setze $t = 0$, dann $\mu = 0$.
Setze $t = \frac{\pi}{2}$, dann $\lambda = 0$
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V = 2$

6.1.1 Basisergänzungssatz

Zeigen, dass jeder Vektorraum eine Basis hat:

Sei V endlich erzeugt. Jede linear unabhängige Menge in V kann zu einer Basis ergänzt werden. Zu einer gegebenen Menge Vektoren $\{v_1, ..., v_n\}$ kann eine Menge ergänzt werden, sodass $\{v1, ..., v_n, w_1, ..., w_k\}$ eine Basis ist.

Beweis. Sei $\{w_1, ..., w_l\}$ ein Erzeugendensystem.
Aus $\{w_1, ..., w_l\}$ kann eine Basis ausgewählt werden:
Ist $\{w_1, ..., w_l\}$ eine Basis? Wenn ja, sind wir fertig. Wenn nein, muss die Menge linear abhängig sein. Folglich $\exists w_j : w_j = \sum_{i \neq j} \lambda w_i$ (dieser Vektor lässt sich als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellen). Somit kann ich diesen Vektor weglassen, und die Menge ist immer noch ein Erzeugendensystem. Wir lassen also w_j weg:
$\{w_1, ..., \widehat{w}_j, ..., w_l\}$ Wieder die Frage, ob das eine Basis ist? Selbe Situation wie oben.
Entweder sind wir irgendwann fertig, oder die Menge enthält nur noch genau ein Element:

$\{w\}$. Die Frage ist nun, ob das letzte Element 0 ist oder nicht. Wenn $w \neq 0$ ist, dann ist $\{w\}$ eine Basis und wir sind fertig. Wenn $w = 0$, dann ist der Nullvektor ein Erzeugendenvektor für den Vektorraum, somit besteht V nur aus dem Nullvektor ($V = \{0\}$, dann hat er die Basis $\emptyset$). □

Ergänzungseigenschaft: $\Leftarrow$ Austauschsatz (Im Prinzip den Algorithmus von eben genau andersrum ausgeführt, also mit v anfangen und es dann ergänzen).

Definition 6.4. Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in K$ Körper.
A ist eine $m \times n$-Matrix (m = Anzahl Zeilen, n = Anzahl Spalten)
Notation:
$a_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} \in K^n$ heißt i-ter Zeilenvektor der Matrix A

$a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ ist der j-te Spaltenvektor der Matrix A.

6.1.2 Bestimmung von Basen: Gaußsches Eliminationsverfahren

Fragestellung: Sei $\{v_1, ..., v_k\} \subset K^n$. Wie bestimmt man eine Basis für den Untervektorraum $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$?

Definition 6.5. Der Zeilenraum, ZR(A), einer Matrix A ist $\langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle \subset K^n$. Mit $a_i = v_i$ gilt $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ = ZR(A)

Plan zur Bestimmung einer Basis für den Zeilenraum der Matrix:

1. Elementaroperationen auf den Zeilen
2. Diese Elementaroperationen verändern den ZR(A) nicht.
3. Durch diese Elementaroperationen lässt sich A auf die "Zeilenstufenform" bringen:

$$\begin{pmatrix} \neq 0 & ? & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \neq 0 & ? & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \neq 0 & ? & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

4. Ablesen der Basis, die durch die Zeilenstufenform gegeben ist

Implementierung des Plans:
1.) Elementaroperationen:

$$\text{I} \quad \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \text{(man multipliziert die } i\text{-te Zeile mit einem } \lambda \neq 0 (\lambda \in K)$$

$$\text{II} \quad \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Bemerkung 6.6. *Durch I und II lassen sich zwei Zeilen vertauschen:*

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{I}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ -a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{II}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i - a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{I,II}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i - (a_i - a_j) \\ \vdots \\ a_i - a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{II}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ (a_i - a_j) + a_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

2.) ZR(A) bleibt unverändert: Operation I: $V = \mu_1 a_1 + \mu 2 a_2 + \cdots + \mu_m a_m = \mu_1 a_1 + \ldots \frac{\mu_i}{\lambda}(\lambda a_i) + \cdots + \mu_m a_m$
Operation II: $= \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_i(a_i + a_j) + \cdots + -(\mu_j - \mu_i)a_j + \cdots + \mu_m a_m$

3.) Zeilenstufenform:
Beispiel: Finde eine Basis für $\langle(1,3,5,-2),(3,-2,-7,5),(2,1,0,1)\rangle \subset \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -7 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir müssen also die letzten beiden Zeilen in der ersten Stelle auf 0 kriegen:
Erste Zeile mit 3 multiplizieren $\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 & -6 \end{pmatrix}$, das von der zweiten Zeile abziehen.
Zweite Zeile mit 2 multiplizieren, das von der dritten Zeile abziehen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -11 & -22 & 11 \\ 0 & -5 & -10 & 5 \end{pmatrix} \overset{\times \frac{-1}{11}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\times \frac{-1}{5}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ im Zeilenstufenform
4.) Basis ablesen: Zeilen nehmen, die verschieden von 0 sind. $\Rightarrow$ Basis $= \{(1,3,5,-2),(0,1,2,-1)\} \Rightarrow \dim = 2$

6.2 Die Summe von Vektorräumen

$W, W' \subset V$ VR.

Definition 6.7. $W+W' := \{v \in V | v = w+w', w \in W, w' \in W'\}$ ist wieder ein Untervektorraum.

Alternativ: $W + W' = \langle W \cup W' \rangle$
Dimensionsformel: $\dim(W + W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W')$

Beispiel 1

$$V = \mathbb{R}^2, W = \langle(1,0)\rangle, W' = \langle(0,1)\rangle$$
$$W + W' = \mathbb{R}^2$$

Einsetzen:

$$2 = 1 + 1 - 0$$

Beispiel 2

$$V = \mathbb{R}^2 . W = \langle(1,1)\rangle, W' = \langle(2,2)\rangle$$

$W + W' = W = W'$. und $W \cap W' = W = W'$
Einsetzen:

$$1 = 1 + 1 - 1$$

Beispiel 3

$$V = \mathbb{R}^3$$

W ist eine Gerade durch den Ursprung, W' eine Ebene.

$$W + W' = \mathbb{R}^3$$

$$3 = 1 + 2 - 0$$

Beispiel 4

$$V = \mathbb{R}^3$$

W ist eine Ebene, W' ist eine orthogonale Ebene. Der Durchschnitt ist somit eine Gerade mit $\dim = 1$

$$W + W' = \mathbb{R}^3$$

$$3 = 2 + 2 - 1$$

Definition 6.8. Direkte Summe: $V = W + W' (W, W' \subset V \text{UVR})$ und $W \cap W' = \{0\}$

$$V = W \oplus W'$$

7 Lineare Algebra 1 vom 28.10.2008

7.1 Beweis der Summenformel

V K-Vektorraum, $W, W' \subset V$ Untervektorraum

$$\dim(W + W') = \dim W + \dim W' - \dim(W \cap W')$$

Beweis. Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis für $W \cap W'$. Wir erweitern aufgrund des Basisergänzungssatzes:
Sei $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k\}$ eine Basis von W, $\{v_1, \dots, v_k, w'_1, \dots, w'_l\}$ eine Basis von W'
Behauptung: $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k, w'_1, \dots, w'_l\}$ ist eine Basis für $W + W'$
Daraus folgt die Formel sofort:

$$\dim(W + W') = n + k + l$$

$$\dim W + \dim W' - \dim(W \cap W') = (n + k) + (n + l) - n$$

Wir weisen die Behauptung nach:
Zu zeigen: Erzeugendensystem: $v \in W + W'$. $v = w + w', w \in W, w' \in W'$ (Def. Summe von zwei Vektorräumen)

$$v = (\sum \lambda_i v_i + \sum \mu_i w_i) + (\sum \lambda'_i v_i + \sum \mu'_i w'_i)$$

Zu zeigen: Lineare Unabhängigkeit:

$$\underbrace{\sum \lambda_i v_i + \sum \mu_j w_j}_{w \in W} + \sum \mu'_m w'_m = 0$$

$$w = \underbrace{-\sum \mu'_m w'_m}_{\in W'}$$

$$\Rightarrow w \in W \cap W'$$

$$\Rightarrow w = \sum \lambda'_i v_i$$

$$= \sum \lambda_i v_i + \sum \mu_j w_j$$

Da die Koeffizienten eindeutig bestimmt sind, wir aber zwei Darstellungen haben, müssen die Koeffizienten jeweils gleich sein. Da aber in der ersten Darstellung gar keine μ_j vorkommen, folgt $\mu_j = 0 \forall j$ und $\lambda'_i = \lambda_i \forall i$

$$w = \sum \lambda_i v_i = -\sum \mu'_m w'_m$$

Selbes Spiel wie eben:

$$\Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i, \mu'_m = 0 \forall m$$

□

7.2 Direkte Summe

$W \oplus W'$ nennt man die direkte Summe ($W \cap W' = \{0\}$).
Es gilt also: $\dim(W \oplus W') = \dim W + \dim W'$

Charakterisierung:

Proposition 7.1.

$$V = W \oplus W' \Leftrightarrow \forall v \in V \exists! w \in W, w' \in W' : v = w + w'$$

Beweis. "$\Rightarrow$") Existenz ist klar, es geht um die Eindeutigkeit: $w + w' = v = w_0 + w'_0$ mit $w, w_0 \in W, w', w'_0 \in W'$

$$\underbrace{w - w_0}_{\in W} = \underbrace{w'_0 - w'}_{\in W'} \in W \cap W' = 0$$

$$w = w_0, w' = w'_0$$

"$\Leftarrow$") Zeigen, dass die Summe direkt ist, also $W \cap W' = 0$. Sei $v \in W \cap W'$ (v kann verstanden werden als Vektor in W oder in W')

$$v = \underbrace{v}_{\in W} + \underbrace{0}_{\in W'} = \underbrace{0}_{\in W} + \underbrace{v}_{\in W'}$$

$$\Rightarrow v = 0$$

Ist $\{w_1, \dots, w_k\}$ eine Basis für W und $\{w'_1, \dots, w'_l\}$ eine Basis für W', dann $\{w_1, \dots, w_k, w'_1, \dots, w'_l\}$ eine Basis für $W \oplus W'$
Basisergänzungssatze $\Rightarrow$ Sei $W \subset V$ ein Untervektorraum. Dann $\exists W' \underset{\text{UVR}}{\subset} V$ (W' nicht eindeutig) sodass $V = W \oplus W'$
Wähle eine Basis von $\{w_1, \dots, w_k\}$ für W, ergänze zu einer Basis $\{w_1, \dots, w_k, w'_1, \dots, w'_l\}$ für V. Setze $W' := \langle w'_1, \dots, w'_l \rangle \Rightarrow V = W \oplus W'$ □

7.3 Lineare Abbildungen

Definition 7.2. Sei $F : V \to W$ eine Abbildung zwischen K-Vektorräumen V, W.
F ist linear, wenn $\forall v, w \in V \forall \lambda, \mu \in K$ gilt:

$$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$$

Bemerkung 7.3.

$$\mu = 0 : F(\lambda v) = \lambda F(v)$$

$$\lambda = \mu = 1 : F(v + w) = F(v) + F(w)$$

Beispiele:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$F(x) = 2x$$
$$F(\lambda v + \mu w) = 2(\lambda v + \mu w)$$
$$\lambda F(v) + \mu F(w) = \lambda(wv) + \mu(2w)$$

$\Rightarrow F$ ist linear.

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$F(x) = x^2$$
$$q = F(3) = F(3 \cdot 1) \neq 3 \cdot F(1) = 3 \cdot 1 = 3$$

$\Rightarrow F$ ist nicht linear.

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$F(x) = x + 1$$
$$F(0) = 0 + 1 = 1$$
$$F(0 \cdot 0) \neq 0 \cdot F(0) = 0$$

$\Rightarrow F$ ist nicht linear.

K Körper. Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix über K.
Def: $F : K^n \to K^m$

$$F(x_1, \dots, x_n) := (\sum_j a_{1j}x_j \sum_j a_{2j}x_j, \dots, \sum_j a_{mj}x_j) \in K^m$$

$\Rightarrow F$ ist linear.

7.3.1 Eigenschaften linearer Abbildungen

$$F : V \to W$$

$F(v) := 0$ ist immer linear.

$$F : V \to V$$

$F(v) := v$ (Identitätsabbildung) ist linear.

Allgemein:

$$F : V \to W$$

- $F(0) := F(0 \cdot 0) = 0 \cdot F(0) = 0$ wenn das nicht so ist, kann es keine lineare Abbildung sein.

- $\{v_i\}_i \subset V$. Angenommen $\{F(v_i)\}$ l.u. $\Rightarrow \{v_i\}$ l.u.

$$(\sum \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow F(\sum \lambda_i v_i) = F(0) = 0$$

$$\sum \lambda F(v_i) = 0$$

  Da die $F(v_i)$ l.u. $\Rightarrow \lambda_i = 0$
  d.h., wenn die Bilder einer Abbildung linear unabhängig sind, waren auch die Urbilder linear unabhängig.

- $\{v_i\}$ l.a. $\Rightarrow \{F(v_i)\}$ l.a.

$$(v_i = \sum j \neq i\lambda_j v_j \Rightarrow F(v_i) = F(\sum j \neq i\lambda_j v_j) = \sum j \neq i\lambda_i F(v_j)$$

- Warnung: Wenn $\{v_i\}$ l.u., dann ist $\{F(v_i)\}$ nicht unbedingt l.u.
  Gegenbeispiel:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(v) = 0 \forall v$$

$$\{1\}$$

  l.u., aber $\{F(1)\} = \{0\}$ l.a.

- $V' \underset{\text{UVR}}{\subset} V \Rightarrow F(V')$ ist ein UVR von W. Klappt nur, wenn F linear ist.

- $W' \underset{\text{UVR}}{\subset} W \Rightarrow F^{-1}(W") \underset{\text{UVR}}{\subset} V$

Satz zur Konstruktion linearer Abbildungen: Seien V, W K-Vektorräume, $\{v_i\}$ eine Basis für V, $\{w_i\} \subset W$ Teilmenge, dann gilt:

1. $\exists!$ lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $F(v_i) = w_i \forall i$
2. $F(v) = \langle\{w_i\}\rangle \subset W$
3. F ist injektiv $\Leftrightarrow \{w_i\}$ linear unabhängig
4. F ist surjektiv $\Leftrightarrow \{w_i\}$ Erzeugendensystem für W

Beweis.

1.
$$v \in V \Rightarrow \exists! \lambda_i : v = \sum_i \lambda_i v_i$$

$$F(v) = F(\sum \lambda_i v_i) \underset{linear}{=} \sum \lambda_i F(v_i) = \sum \lambda_i w_i$$

$\Rightarrow$ Def.: $F(v) := \sum \lambda_i w_i \Rightarrow F$ ist linear.

2. "Denken Sie da einfach nochmal drüber nach, das ist klar." Da $\langle\{w_i\}\rangle$ ein Erzeugendensystem bildet, steht da $F(v) = W$ (Def. Surjektivität)

3. "$\Rightarrow$")
$$\sum \lambda_i w_i = 0 = F(0)$$
$$= \sum \lambda_i F(v_i) = F(\sum \lambda_i v_i)$$
Wegen der Injektivität schließt man: $\Rightarrow \sum \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i$
"$\Leftarrow$")
$$F(v) = F(w)$$
$$v - w = \sum \lambda_i v_i$$
$$F(v-w) = F(\sum \lambda_i v_i) = \sum \lambda_i F(v_i) = \sum \lambda_i w_i$$
$$F(v-w) = F(v) - F(w) = 0$$
Da $\{w_i\}$ linear unabhängig $\Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i \Rightarrow v - w = 0 \Rightarrow v = w$, also ist die Abbildung injektiv.

4. Wird von 2. impliziert.

$\square$

7.4 Homomorphismus etc.

Definition 7.4.
$$\hom_K(V, W)$$
Eine lineare Abbildung F heißt auch Homomorphismus. F muss linear sein.
F injektiv: $\Leftrightarrow$ F Monomorphismus
F surjektiv: $\Leftrightarrow$ F Epimorphismus
F bijektiv: $\Leftrightarrow$ F Isomorphismus
$F : V \to V \Leftrightarrow F$ Endomorphismus
$F : V \to V$ und bijektiv, $\Leftrightarrow F$ Automorphismus

8 Lineare Algebra 1 vom 30.10.2008

$$\hom_k(V, W) := \{F \cdot V \to W | F \text{ linear}\}$$

$\hom_k(V, W)$ ist selbst ein K-Vektorraum.

$$F, G \in \hom_k(V, W) : (F + G)(v) := F(v) + G(v)$$

$\Rightarrow F + G : V \to W$ ist linear

$$\lambda \in K : (\lambda \cdot F) := F(v) \cdot \lambda \Rightarrow \lambda F \text{ linear}$$

Spezialfall:
$V^* := \hom_k(V, K)$ ist der duale Vektorraum.

Sei $F : V \to W$ linear.

Definition 8.1. Der Kern von F ist $\ker(F) := \{v \in V | F(v) = 0\} = F^{-1}(0)$

$\ker(F) \subset V$ ist ein UVR:

1. $0 \in \ker(F)$, da $F(0) = 0$
2. Abgeschlossen unter $+$, da $F(v) = 0, F(w) = 0 \Rightarrow F(v+w) \underset{\text{lin.}}{=} F(v) + F(w) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow v + w \in \ker(F)$
3. $F(v) = 0 \Rightarrow F(\lambda v) \underset{\text{lin.}}{=} \lambda F(v) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda v \in \ker(F)$

Definition 8.2. Das Bild von $F : \text{Im}(F) := F(V) \underset{\text{UVR}}{\subset} W$

Proposition 8.3. *F injektiv* $\Leftrightarrow \ker(F) = 0$

Beweis.
"$\Rightarrow$") Sei $v \in \ker(F)$, d.h. $F(v) = 0 = F(0)$. F injektiv $\Rightarrow v = 0$
"$\Leftarrow$") $F(v) = F(w)$, zu zeigen: $v = w$

$$F(v - w) \underset{\text{lin.}}{=} F(v) - F(w) = 0 \Rightarrow v - w \in \ker(F) = 0 \Rightarrow v - w = 0 \Leftrightarrow v = w$$

□

8.1 Dimensionsformel

$F : V \overset{\text{lin}}{\to} W (\dim(V) < \infty)$ (in Zukunft sind die Abbildungen immer linear, auch wenn nicht extra erwähnt)

$$\dim(V) = \dim(\text{Im}(F)) + \dim(\ker(F))$$

Beweis. Sei $\{w_1, \dots, w_r\}$ eine Basis für $\mathrm{Im}(F)$.
Wähle $\{v_1, \dots, v_r\} \subset V$ mit $F(v_i) = w_i \forall i$
Sei $\{v'_1, \dots, v'_k\}$ eine Basis für $\ker(F)$
Behauptung: $\{v_1, \dots, v_r, v'_1, \dots, v'_k\}$ ist eine Basis für V. Erzeugendensystem: $v \in V$. $F(v) = \sum \lambda_i w_i$, da $F(v) \in \mathrm{Im}(F)$
$F(v - \sum \lambda_i v_i) = F(v) - F(\sum \lambda_i v_i) = F(v) - \sum \lambda_i F(v_i) = 0$ (da $F(v_i) = w_i$)

$$\Rightarrow v - \sum \lambda_i v_i \in \ker(F)$$
$$\Rightarrow v - \sum \lambda_i v_i = \sum \lambda'_i v'_i$$

d.h., wir haben v dargestellt als Linearkombination, d.h. es ist ein Erzeugendensystem.
Linear unabhängig: $\sum \lambda_i v_i + \sum \lambda'_i v'_i = 0$

$$F(\underbrace{\sum \lambda_i v_i}_{\sum \lambda_i w_i = F(v_i)} + \underbrace{\sum \lambda'_i v'_i}_{\sum \lambda'_i F(v'_i) = 0}) = 0$$
$$\Rightarrow \sum \lambda_i w_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i$$
$$\Rightarrow \sum \lambda'_i v'_i = 0 \Rightarrow \lambda'_i = 0 \forall i$$

□

Korrolar 8.4. *Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus,* $\dim(V) < \infty$. *Dann gilt: F surjektiv $\Leftrightarrow$ F injektiv.*

Proof. F surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(F) = V \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(V)$

$$\dim(V) = \dim(V) + \dim(\ker(F)) \Leftrightarrow \dim(\ker(F)) = 0 \Leftrightarrow \ker(F) = 0$$

Wegen der letzten Proposition wissen wir, dass F injektiv ist, da der Kern 0 ist. □

8.2 Lineare Abbildungen und Matrizen

(Hier ist immer dim $< \infty$)

Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung.
Wähle eine Basis $\mathscr{A} = \{v_1, \dots, v_r\}$ für V
Wähle eine Basis $\mathscr{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ für W

$$\underbrace{F(v_j)}_{\in W} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

für eindeutig bestimmte Koeffizienten a_{ij}

Definition 8.5. Die Matrixdarstellung von F bezüglich der Basen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ ist:

$$M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(F) := (a_{ij})$$

Wir erhalten eine $m \times n$-Matrix

Beispiel 1:

$$F : R^2 \to R^3$$

$$F(x, y) = (2x - 3y, x + y, 5x + 8y)$$

Man muss angeben, welche Basis man verwendet (in diesem Fall die kanonischen Basen):

$$\mathscr{A} = \{e_1, e_2\}, \mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$F(e_1) = F(1, 0) = (2, 1, 5) = 2e_1 + 1e_2 + 5e_3$$
$$F(e_2) = F(0, 1) = (-3, 1, 8)$$

$$M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2: Sei A eine $m \times n$-Matrix

$$F : K^n \to K^m$$

$$F(x_1, \dots, x_n) := (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum a_{2j}x_j, \dots, \sum a_{nj}x_j)$$

ist eine lineare Abbildung

$$\Rightarrow M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(F) = A$$

Beispiel 3: $V :=$ { Polynome p mit reellen Koeffizienten $| \deg(p) \leqslant 3\}$

$$F : V \to V$$

$F(p) := p'$ (1. Ableitung). linear.

$$M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(F) = ?$$
$$\mathscr{A} = \mathscr{B} = \{1, t, t^2, t^3\}, \dim(V) = 4 = n = m \Rightarrow 4 \times 4 - \text{Matrix}$$

$$F(1) = 0$$
$$F(t) = 1 + 0t + 0t^2 + 0t^3$$
$$F(t^2) = 2t$$

$$F(t^3) = 3t^2$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hom_k(V, W)$$

$$F, G : \underbrace{V}_{\mathscr{A}} \to \underbrace{W}_{\mathscr{B}} \text{ linear}$$

$$M(F) = (a_{ij})$$

$$M(G) = (b_{ij})$$

$$M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(F+G) : (F+G)(v_j) = F(v_j) + G(v_j) = \sum_i a_{ij}w_i + \sum_i b_{ij}w_i = \sum_i (a_{ij} + b_{ij})w_i$$

$$\Rightarrow M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(F+G) = (c_{ij}), c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Definition 8.6. $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$. Addition zweier Matrizen:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Definition 8.7. Skalarmultiplikation auf Matrizen:

$$\underbrace{M(\lambda F)}_{(\lambda a_{ij})} : (\lambda F)(v_j) = \lambda \sum a_{ij}w_i = \sum (\lambda a_{ij})w_i$$

$$\lambda \cdot A := (\lambda a_{ij})$$

$$\underbrace{V}_{\mathscr{A}} \underset{\text{lin.}}{\overset{F}{\to}} \underbrace{W}_{\mathscr{B}} \underset{\text{lin.}}{\overset{G}{\to}} \underbrace{Z}_{\mathscr{C}}$$

$G = F$ ist linear

$$\mathscr{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

$$\mathscr{B} = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

$$\mathscr{C} = \{u_1, \ldots, u_r\}$$

Aufgabe: Bestimme $M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(G \cdot F)$
$(M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(F), M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(G)$ bekannt

$$F(v_j) = \sum_i a_{ij}w_i$$

$$G(w_i) = \sum_i b_{ki}u_k$$

$$(G \circ F)(v_j) = G(\sum_i a_{ij} w_i) = \sum_i a_{ij} G(W_i) = \sum_i a_{ij} \sum_k b_{ki} u_k = \sum_k (\sum_i a_{ij} b_{ki}) u_k$$

$$M(G \circ F) = (c_{kj}), c_{kj} = \sum_i a_{ij} b_{ki}$$

$$k = j = l : c_{11} = \sum_i a_{i1} b_{1i}$$

8.3 Matrizenmultiplikation

$$B \cdot A = (c_{kj})$$

Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9 Lineare Algebra 1 vom 04.11.2008

Matrixmultiplikation: Nullteiler: z.B.:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Transponierte Matrix:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \rightsquigarrow {}^tA := (a_{ji})_{n\times m}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$

$${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$$

$${}^t({}^tA) = A$$

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$$

Einheitsmatrix ($n \times n$):

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sie ist das neutrale Element der Multiplikation: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Distributivgesetze gelten bei der Matrixmultiplikation:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Assoziativgesetz gilt:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

9.1 Rang einer linearen Abbildung

$$F : V \to W \text{ linear}$$

$$\dim V = \dim \operatorname{Im}(F) + \dim \ker(F)$$

Definition 9.1.

$$\operatorname{Rang}(F) = \operatorname{Rg}(F) := \dim \operatorname{Im}(F)$$

$$\dim V = \operatorname{Rg}(F) + \dim \ker(F)$$

Eigenschaften des Rangs:

- $\operatorname{Rg}(F) \leqslant \dim V, \dim W$
- $\operatorname{Rg}(F) = \dim V \Leftrightarrow F \text{inj.}$

Praktische Bestimmung des Rangs:
Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix.

Definition 9.2.

$$\text{Spaltenraum (SR)}(A) := \langle \{a^j\} \rangle$$

$$\text{Spaltenrang}(A) := \dim \operatorname{SR}(A)$$

Proposition 9.3. *$Rg(F) = Spaltenrang(M(F))$ ($M(F)$ ist die Matrixdarstellung von F)*

Beweis. $\operatorname{Rg}(F) = \dim \operatorname{Im}(F) = \dim \langle \{F(v_j)\} \rangle$
$\mathscr{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis für V, $= \dim \langle \{\sum_i a_j w_i\} \rangle$ $B = \{w_1, \ldots, w_m\}$, $(M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(F) = (a_{ij}))$,
$= \dim \langle a^j \rangle$ □

$$\operatorname{Rg}(F) = \operatorname{SpRg}(M(F)) = \operatorname{Zeilenrang}({}^t M(F))$$

Rang einer Abbildung bestimmen: Als Matrix darstellen und Zeilenrang bestimmen (durch elementare Zeilenoperationen, Gauß-Elimination).

9.2 Isomorphismen & invertierbare Matrizen

$F : V \to W$ ist ein Isomorphismus, wenn F linear und bijektiv ist.

$$\Rightarrow \exists \text{Umkehrabbildung} F^{-1} : W \to V \text{ ist wieder linear}$$

$$\dim V < \infty, \dim W < \infty$$

Definition 9.4. Eine quadratische $n \times n$-Matrix (nicht-quadratische Matrizen sind nie invertierbar, weil man nie einen Isomorphismus zwischen verschiedenen Definitionen haben kann, denn ansonsten wäre die Abbildung entweder nicht surjektiv oder nicht injektiv) heißt invertierbar, wenn eine eine $n \times n$-Matrix A' existiert mit $A \cdot A' = A' \cdot A = I_n$ (Einheitsmatrix) Ist A nicht invertierbar, dann nennen wir A eine singuläre Matrix (die Nullmatrix ist z.B. nicht invertierbar).

Proposition 9.5. *$F : V \to W$ lin.*

$$F \text{ isomorph} \Leftrightarrow M(F) \text{ invertierbar}$$

Beweis. ”$\Rightarrow$”) $\exists F^{-1} : W \overset{\text{lin.}}{\to} V$

$$A := M(F), A' := M(F^{-1})$$

Nachrechnen:

$$A \cdot A' = M(F) \cdot M(F^{-1}) = M(F \cdot F^{-1}) = M(\text{id}) = I_n$$

$A' \cdot A = I_n$ analog □

”$\Leftarrow$”) Definiere F^{-1} durch A'.

Ist A invertierbar, dann heißt A' inverse Matrix zu A. $A^{-1} := A'$

Korrolar 9.6. *Sei A eine $n \times n$-Matrix. Es gilt:*

$$A \textit{ ist invertierbar} \Leftrightarrow \textit{Spaltenrang}(A) = n \Leftrightarrow \textit{Zeilenrang}(A) = n$$

Beweis. A inv $\Leftrightarrow {}^tA$ inv :

$${}^tA \cdot \underbrace{({}^tA)^{-1}}\, {}^t(A') = {}^t(A' \cdot A) = (I_n)^t = I_n$$

$$\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}({}^tA) = n$$

□

Definition 9.7. Die ”general linear group”:

$$GL_n(\underbrace{\text{Körper}}\, K) := \{A \; n \times n \text{ Matrix über K} | A \text{ invertierbar}\}$$

ist eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation, das neutrale Element ist die I_n, die Einheitsmatrix

9.2.1 Praktische Bestimmung der inversen Matrix

Versuche die Matrix $(A|I_n)$ durch Gauss-Elimination (elementare Zeilenumformungen) auf die Form $(I_n|B)$ zu bringen. Wenn das gelingt, dann ist A invertierbar und $B = A^{-1}$.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & || & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & || & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & || & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & || & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & || & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \text{invertierbar}, A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Überprüfen via $A \cdot A^{-1} = I_3$

Fall $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Sofern $(ad - bc \neq 0)$, d.h. nur dann ist A invertierbar (bei 2×2). Diese Zahl nennt man auch die Determinante, jede Matrix hat eine.

9.3 Basiswechsel (Transformationsformel)

Definition 9.8. Ein Diagramm von Abbildungen

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "g'"'] & D \end{tikzcd}$$

heißt kommutativ, wenn $gf = g'f'$

Sei $\mathscr{A} := \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis für V. Def. lineare Abbildung

$$\phi_{\mathscr{A}} : K^n \overset{\cong}{\to} V$$

($\cong$ ist das Symbol für Isomorphismus)

$$\phi_{\mathscr{A}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \sum_i \lambda_i v_i$$

$$\phi_{\mathscr{A}} \text{inj} : \sum \lambda_i v_i = 0 \underset{\text{l.u.}}{\Rightarrow} \lambda_i = 0 \forall i$$

Sei $\mathscr{A}' \subset V$ eine 2. Basis für V.

$$T : K^n \underset{\cong}{\overset{\text{lin.}}{\to}} K^n, T = \phi_{\mathscr{A}'}^{-1} \cdot \phi_{\mathscr{A}}$$

$F : V \overset{\text{lin}}{\to} W$, seien $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ Basen für W

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[rrr, "M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(F)"] \arrow[dr, "\phi_{\mathscr{A}} \cong"] \arrow[dd, "T\,(\text{komm.})"'] & & & K^m \arrow[dl, "\phi_{\mathscr{B}} \cong"'] \arrow[dd, "S\,(\text{komm.})"] \\ & V \arrow[r, "F"] & W & \\ K^n \arrow[rrr, "M_{\mathscr{A}',\mathscr{B}'}(F)"'] \arrow[ur, "\phi_{\mathscr{A}'} \cong"'] & & & K^m \arrow[ul, "\phi_{\mathscr{B}'} \cong"] \end{tikzcd}$$

$$S := \phi_{\mathscr{B}'}^{-1} = \phi_{\mathscr{B}} \Rightarrow M_{\mathscr{A}',\mathscr{B}'}(F) = S\, M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(F) T^{-1}$$

(Transformationsformel)

10 Lineare Algebra 1 vom 06.11.2008

Proposition 10.1. *Sei A eine $m \times n$-Matrix. Es gilt:*

$$\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A)$$

$$F : V \to W \text{ linear}$$

$$Rg(F) = SpRg(M(F))$$

Beweis. Wir fassen A als lineare Abbildung $F = A : \underbrace{K^n}_{V} \to \underbrace{K^n}_{W}$ auf

Sei $\{w_1, ..., w_r\}$ eine Basis für $\mathrm{im}(F)$.
Ergänze zu einer Basis $\mathscr{B} := \{w_1, ..., w_r, w_{r+1}, ..., w_m\}$ für W
Sei $\mathscr{A} = \{v_1, ..., v_r, v_1', ..., v_k'\}$ eine Basis für V mit $F(v_i) = w_i, \{v_1', ..., v_k'\}$ ist eine Basis für $\ker(F)$.

$$\Rightarrow M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Zeilenrang}(M(F)) = r = \text{Spaltenrang}(M(F))$$

$$F = A : \underbrace{\text{Rg}(A)}_{\text{SpRg}(A)} = \text{Spaltenrang}(M(F)) = r$$

$$F = A^t : \underbrace{\text{Rg}(A^t)}_{\text{SpRg}(A^t) = \text{ZRg}(A)} = \text{Spaltenrang}(M(F)^t)$$

$$\Rightarrow \text{Spaltenrang}(A) = r = \text{Zeilrang}(A)$$

□

10.1 Lineare Gleichungssysteme

10.1.1 Homogene Systeme

Folgendes System nennen wir $(*)$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Ein homogenes lineares Gleichungssystem besteht aus m Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, ..., x_n$.

Aufgabe: Finde alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, sodass $(*)$ erfüllt ist ("Lösungen").

Wir setzen $A := (a_{ij})_{m\times n}, A : K^n \to K^n$.
$(*)$ erfüllt für $x \Leftrightarrow A \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(A)$

Definition 10.2. Lösungsraum von $(*)$:

$$L := \{x|(*) \text{ gilt für } x\} = \ker(A) \underset{\text{UVR}}{\subset} K^n$$

$$\dim(K^n) = \mathrm{Rg}(A) + \dim(\ker(A))$$
$$\Rightarrow \dim(L) = n - \mathrm{Rg}(A)$$

Lemma 10.3. *Die Anwendung von elementaren Zeilenumformungen*

$$I \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}}_{A} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix}}_{A'}, \lambda \neq 0$$

$$II \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}}_{A} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}}_{A'}$$

ändert den Lösungsraum nicht

Beweis. $x \in L(A')$ für Typ$I$

$$A' \cdot x = 0.\lambda a_i x = 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}(\lambda a_i x) = 0 \Rightarrow a_i x = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in L(A)$$

$x \in L(A')$ für TypII

$$(a_i + a_j)x = 0 \Rightarrow a_i x + a_j x = 0 = a_j x \Rightarrow a_i x = 0 \Rightarrow x \in L(A)$$

(und umgekehrt) □

$\Rightarrow$ Wir dürfen den Lösungsraum mithilfe von Gauß-Elimination bestimmen.

Beispiel: Folgendes Gleichungssystem nennen wir $(*)$:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathrm{Rg}(A)=2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

$$L(A) = L(A') = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = \left\{ x \middle| \begin{array}{l} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}$$

$$\dim(L(A)) = 1 = 3 - 2 = n - \mathrm{Rg}(A)$$

10.1.2 Inhomogene lineare Gleichungssysteme

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(kann $\neq 0$ sein)

Aufgabe: Bestimme alle x mit $Ax = b$

Definition 10.4. Lösungsraum $L(b) := \{x | Ax = b\}$

Sei $x_0 \in L(b)$ (= wir haben schon eine Lösung erhalten). Sei $v \in L(b) \Rightarrow Ax_0 = b = Av$

$\Rightarrow A(v - x_0) = 0 \Rightarrow v - x_0 \in \ker(A) = L(0)$(Lösungsraum des zugehörigen homogenen Systems)

$$v = x_0 + \underbrace{(v - x_0)}_{L(0)} \Rightarrow L(b) = x_0 + L(0)$$

Bemerkung 10.5. *$L(b)$ für $b \neq 0$ ist kein UVR! (da $0 \neq L(b)$)*

Definition 10.6. Ein **affiner Unterraum** X eines Vektorraums V ist von der Form $X = v + W$ für $v \in V, W \underset{\text{UVR}}{\subset} V$

Beispiel: $L(b)$ ist ein affiner Unterraum.

Bemerkung 10.7. *Ein inhomogenes Gleichungssystem muss nicht unbedingt eine Lösung besitzen:*

$$\underbrace{0}_{A} \cdot x = \underbrace{1}_{b}$$

10.1.3 Bestimmung einer bestimmten inhomogenen Lösung

Beispiel:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Man bildet die erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sofern eine Zeile $0 \quad 0 \quad 0 \quad (\neq 0)$ existiert hat das Gleichungssystem keine Lösung.

$$L(b) = L\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 = 3x_3 + 1 \\ x_2 = -x_3 + 2 \\ x_3 \text{beliebig} \end{array} \right\} = \left\{ x_3 \text{beliebig} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 + x_3 \cdot 3 \\ 2 + x_3 \cdot (-1) \\ 0 + x_3 \end{array} \right\} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_0} + \underbrace{x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{L(0)}$$

Bemerkung 10.8. *1. $(*)$ ist lösbar für jedes $b \Leftrightarrow A : K^n \to K^m$ ist surjektiv $\Leftrightarrow Rg(A) = m$*

2. Eindeutigkeit der Lösung: $\Leftrightarrow \underbrace{L(0)}_{\ker(A)} = 0 \Leftrightarrow A$ injektiv $\Leftrightarrow Rg(A) = n$

10.2 Permutationen

Permutationen: $\{1, ..., n\}$

Definition 10.9. Eine Permutation von n Elementen ist eine Bijektion $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$

Notation:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & ... & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

Beispiel:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Definition 10.10.

$$S_n := \{\text{Permutationen } \sigma \text{ auf } \{1, ..., n\}\}$$

S_n ist eine Gruppe bezüglich $\circ$ (Komposition).
Das neutrale Element = $\mathrm{id}_{\{1,...,n\}}.\sigma(i) = i \forall i$
S_n ist nicht abelsch für jedes n.

Möglichkeiten für Permutationen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & ... & n \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

Kardinalität $S_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1 = n!$

11 Lineare Algebra 1 vom 11.11.2008

11.1 Das Vorzeichen (Signum) einer Permutation

Definition 11.1. $\tau \in S_n$ heißt Transposition, wenn τ genau zwei Elemente vertauscht und alle anderen fest lässt.

Das Inverse einer Transposition ist sie selbst:

$$\tau^{-1} = \tau$$

$$(\tau^2 = \mathrm{id})$$

Beispiel:

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Jede Permutation $\sigma \in S_n$ lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tau_1\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\tau_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tau_2\tau_1\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \tau_3 \text{ist eine Transposition}$$

$$\Rightarrow \sigma = \tau_1\tau_2\tau_3$$

11.1.1 Signum

Sei $\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_k$ dargestellt als Produkt von Transpositionen.

Definition 11.2. Das Signum (Vorzeichen), $\mathrm{sgn}(\sigma)$ von σ ist

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$$

Wir nennen σ gerade, wenn $\mathrm{sgn}(\sigma) = +1$ (d.h. k gerade)
Wir nennen σ ungerade, wenn $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ (d.h. k ungerade)

Warum ist $\mathrm{sgn}(\sigma)$ wohldefiniert?

Satz 11.3. *Eine Permutation σ kann nicht gleichzeitig als Produkt einer geraden und als Produkt einer ungeraden Anzahl an Transpositionen dargestellt werden.*

Beweis. Für $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n)$ definieren wir

$$\delta(i_1, \ldots, i_n) := \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (i_j - i_k) \Rightarrow \delta(i_1, \ldots, i_n) \neq 0$$

Wir untersuchen den Effekt einer Transposition τ auf δ: τ vertauscht die Elemente $i_c, i_d, c < d$

$$A := \prod_{j<k, j \neq c,d, k \neq c,d} (i_j - i_k)$$

$$C_c := \prod_{j<c} (i_j - i_c)$$

$$C_d := \prod_{j<d} (i_j - i_d)$$

$$M_d := \prod_{c<j<d} (i_j - i_d)$$

$$M_c := \underbrace{\prod_{c<k<d} (i_c - i_k)}_{d-c-1 \text{Faktoren}}$$

$$D_d := \prod_{d<k} (i_d - i_k)$$

$$D_c := \prod_{d<k} (i_c - i_k)$$

$$\delta = (i_c - i_d) \cdot A \cdot C_c \cdot C_d \cdot M_c \cdot M_d \cdot D_c \cdot D_d$$

Notation:

$$\tau(A) := \prod_{j<k \wedge j,k \neq c,d} (\tau(i_j) - \tau(i_k))$$

Analog $\tau(C_c), \tau(C_d), \ldots$

$$\tau(A) = A$$

$$\tau(C_c) = C_d$$

$$\tau(C_d) = C_c$$

$$\tau(D_c) = D_d$$

$$\tau(D_d) = D_c$$

$$\tau(M_c) = (-1)^{d-c-1} M_d$$

$$\tau(M_d) = (-1)^{d-c-1} M_c$$
$$\tau(i_c - i_d) = i_d - i_c = -(i_c - i_d)$$

$$\begin{aligned}\tau(\delta) &= \tau(i_c - i_d) \cdot \tau(A) \cdot \tau(C_c) \cdot \tau(C_d) \cdot \tau(M_c) \cdot \tau(M_d) \cdot \tau(D_c) \cdot \tau(D_d) \\ &= -(i_c - i_d) \cdot A \cdot C_d \cdot C_c \cdot (-1)^{d-c-1} M_d \cdot (-1)^{d-c-1} M_c \cdot D_d \cdot D_c \\ &= -\delta(i_1, \dots, i_n)\end{aligned}$$

Jetzt zu allgemeinen Permutationen σ (Widerspruchsbeweis):
Angenommen, $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r$, r gerade und
$\sigma = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_s$, s ungerade

$$\begin{aligned}\sigma\delta(1, 2, \dots, n) &= \delta(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)) \\ = \delta((\tau_1\tau_2 \dots)(1), (\tau\tau_2 \dots)(2), \dots) &= -\delta(\tau_2\tau_3(1), \dots) \\ = (-1)^r \cdot \delta(1, 2, \dots, n) &= \delta(1, 2, \dots, n)\end{aligned}$$

Andere Darstellung:

$$\sigma\delta(1, \dots, n) = \delta(\tau'_1\tau'_2 \dots (1), \dots, \tau'_1\tau'_2 \dots (n))$$
$$= (-1)^s \delta(1, \dots, n) = -\delta(1, \dots, n)$$
$$\Rightarrow \delta(1, \dots, n) = -\delta(1, \dots, n) \Rightarrow \delta(1, \dots, n) = 0$$

$\lightning$

Beispiel:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^3 = -1$$

11.2 Determinante

$$M_n(\underbrace{K}_{\text{Körper}}) := \{n \times n \text{ Matrizen}(a_{ij}) | a_{ij} \in K\} \text{ quadr. Matrizen der Ordnung } n$$

Die Determinante ist eine Funktion von $M_n(K) \xrightarrow{\det} K$

Definition 11.4.

$$A \in M_n(K), \det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)} \cdot a_{\sigma(2)} \cdot a_{\sigma(3)} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)}$$

Beispiel:

$$n = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathrm{id}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\tau}\}$$

$$\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = +1$$

$$\mathrm{sgn}(\tau) = -1$$

$$\det(A) = \mathrm{sgn}(\mathrm{id}) \cdot a_{11} \cdot a_{22} + \mathrm{sgn}(\tau) \cdot a_{1\tau(1)} \cdot a_{2\tau(2)} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

(Diesen Fall sollte man sich merken)

Bemerkung 11.5. *Beim Invertieren einer* 2×2*-Matrix:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tauchte folgender Faktor auf:

$$\frac{1}{ad - bc} = \frac{1}{\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

11.3 Eigenschaften der Determinante

Alternierend

$$\det(\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix}) = -\det(\begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix})$$

Beweis. Summanden $\mathrm{sgn}(\sigma) a_{i\sigma(i)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{k\sigma(k)} \dots a_{n\sigma(n)}$
Nach Vertauschen:

$$\begin{aligned} & \mathrm{sgn}(\sigma) a_{i\sigma(i)} \dots a_{k\sigma(i)} \dots a_{i\sigma(k)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma) \cdots a_{i\sigma(k)} \dots a_{k\sigma(i)} \dots \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma) a_{i\sigma'(i)} \dots a_{i\sigma'(i)} \dots a_{k\sigma'(k)} \dots a_{n\sigma'(n)} \\ &= -\mathrm{sgn}(\sigma') a_{i\sigma'(i)} \dots a_{i\sigma'(i)} \dots a_{k\sigma'(k)} \dots a_{n\sigma'(n)} \end{aligned}$$

$$\sigma' := \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & \sigma(k) & \dots & \sigma(i) & \dots & n \end{bmatrix}$$

$\square$

Multilinearität

$$\det(\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + b_i \\ \vdots \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}) + \det(\begin{pmatrix} \vdots \\ b_i \\ \vdots \end{pmatrix})$$

$$\det(\begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix}) = \lambda \det(\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix})$$

$\det(I_n) = 1$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.3.1 Determinante der transponierten Matrix

$A \leftrightarrow A^t$

$$A^t = (a_{ji}), A = (a_{ij})$$

$$\det(A^t) = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(a)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \det(A)$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma) : \sigma = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k, \sigma^{-1} = \tau_k^{-1} \cdot \dots \cdot \tau_1^{-1} = \tau_k \cdot \dots \cdot \tau_1$$

Die Determinante ändert sich nicht bei der Transposition einer Matrix.

zwei gleiche Zeilen

Hat A zwei gleiche Zeilen, dann ist die $\det(A) = 0$.
Die Zahl muss 0 sein, da sich beim Vertauschen der beiden Zeilen ja das Vorzeichen ändert, ohne dass sich aber der Inhalt verändert (siehe oben, alternierend). Das kann nur stimmen, wenn die Zahl 0 ist.

Zeilenaddition

$$\det(\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix})$$

Beweis. Multilinearität

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Letztere ist 0 wegen oben (zwei gleiche Zeilen). □

Nullzeile

Ist eine Zeile von A gleich 0, dann ist $\det(A) = 0$.

12 Lineare Algebra 1 vom 13.11.2008

12.0.2 Lineare Unabhängigkeit der Zeilen einer Matrix

Proposition 12.1.

$$A = (a_{ij})_{n\times n}.\{a_{ij},\dots,a_n\}\mathit{lin.\ u.} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Beweis. "⇒") $\{a_{ij},\dots,a_n\}$ ist eine Basis von K^n.

$$\underbrace{e_i}_{\text{kanon. Basisvektoren von } K^n} = \sum_j b_{ij}a_j$$

$$1 = \det(I) = \det(\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} \sum_{j_1} b_{1j_1}a_{j_1} \\ \sum_{j_2} b_{2j_2}a_{j_2} \\ \vdots \\ \sum_{j_n} b_{2j_n}a_{j_n} \end{pmatrix}) \overset{\text{Multilin.}}{=} \underbrace{\sum_{j_1}\sum_{j2}\dots\sum_{j_n}}_{\sum_{j_1,j_2,\dots,j_n}} b_{1j_1}b_{2j_2}\dots b_{nj_n}\det(\begin{pmatrix} a_{j_1} \\ a_{j_2} \\ \vdots \\ a_{j_3} \end{pmatrix})$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} b_{j\sigma(1)}\dots b_{n\sigma(n)}\det(\begin{pmatrix} a_{1\sigma(1)} \\ \vdots \\ a_{n\sigma(n)} \end{pmatrix}) = \sum_{\sigma\in S_n} b_{1\sigma(1)}\dots b_{n\sigma(n)}\det(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix})\mathrm{sgn}(\sigma)$$

$$= \det(A)\sum \mathrm{sgn}(\sigma)b_{1\sigma(1)}\dots b_{n\sigma(n)} = \det(A)\det(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix})$$

$$\Rightarrow 1 = \det(A)\cdot\det(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}) \Rightarrow \det(A) \neq 0$$

Falls $j_k = j_l$ für $k \neq l$, dann ist $\det(\begin{pmatrix} a_{j_l} \\ a_{j_k} \\ \vdots \\ a_{j_k} \\ \vdots \\ a_{j_n} \end{pmatrix}) = 0$ (eine Determinante mit zwei gleichen Zeilen ist immer 0)

"⇐") $\{a_{1j},\dots,a_n\}$l.a., Zu zeigen: $\det(A) = 0$

$$\Rightarrow \exists k : a_k = \sum_{l\neq k}\lambda_l a_l$$

$$\det(A) = \det(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) = det(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \sum_{l\neq k} \lambda_l a_l) \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) = \sum_{l\neq k} \lambda_l \det(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) = 0$$

(a_l sitzt auch in der l-ten Zeile, somit sind alle diese Determinanten 0) □

Folgerung: A ist $\underbrace{\text{invertierbar}}_{\mathrm{Rg}(A)=n} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

12.1 Charakterisierung der Determinante

Sei $\Delta : M_{\text{quadr.}}(K) \to K$ eine Funktion, die die Eigenschaften $(I), (II), (III)$ hat. Dann ist $\Delta = \det$

Beweis.

$$A = (a_{ij}), a_i = \sum_j a_{ij} e_j$$

$$\Delta(A) = \Delta(\begin{pmatrix} \sum_{j_1} a_{1j_1} e_{j_1} \\ \vdots \\ \sum_{j_n} a_{nj_n} e_{j_n} \end{pmatrix}) \overset{(II)}{=} \sum_{j_1,\ldots,j_n} a_{ij_1} \ldots a_{ij_n} \Delta(\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}) \overset{(I)}{=} \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n}}_{\sigma(n)=j_n} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) \underbrace{\Delta(\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix})}_{=1 \text{ wegen (III)}}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \det(A)$$

□

Anwendung:

Proposition 12.2.

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Beweis. Fall 1: $\mathrm{Rg}(A) < n$ oder $\mathrm{Rg}(B) < n$

$$\Rightarrow \mathrm{Rg}(AB) < n$$

$$\det(AB) = 0$$

da entweder $\det(A) = 0$ oder $\det(B) = 0$, ist tatsächlich $\det(AB) = 0$

Fall 2: $\mathrm{Rg}(A) = n = \mathrm{Rg}(B) \Rightarrow \det(B) \neq 0$
Def: $\Delta(A) := \det(B)^{-1} \cdot \det(AB)$
Durch Nachrechnen überprüft man, dass Δ die Eigenschaften $(I), (II), (III)$ besitzt. Laut obigem Satz $\Rightarrow \det(A) = \Delta(A) = (\det(B))^{-1} \cdot \det(AB)$ □

Folgerung: Ist A invertierbar, dann gilt:

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) = 1$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

12.2 Laplace-Entwicklung

$A = (a_{ij})_{n \times n}$

Definition 12.3.
- Minore: $M_{ij} := (n-1) \times (n-1)$-Matrix erhalten durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A
- Kofaktoren: $A_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$

Vorzeichen bilden ein "Schachbrettmuster".

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = +\det(\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}) = -20 + 2 = -18$$

$$A_{21} = -\det(\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}) = -(15 - 4) = -11$$

$$A_{31} = +\det(\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}) = 6 - 16 = -10$$

Satz 12.4. $\det(A) = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in}$ *(Entwicklung "nach der i-ten Zeile")*
$\det(A) = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj}$ *(Entiwcklung "nach der j-ten Spalte")*

Beweis.

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \underbrace{a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}}_{\text{enthält genau ein Element aus der i-ten Zeile}} = a_{i1} \cdot A^*_{i1} + a_{i2} \cdot A^*_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A^*_{in}$$

$A^*_{i1}, A^*_{i2}, \dots$ enthalten kein Element aus der i-ten Zeile.
Für $i = j = n$:

$$A^*_{nn} = \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(n) = n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)}$$
$$= (-1)^{n+n} \det(M_{nn}) = A_{nn}$$

Für allgemeine i, j :
Tausche Zeile i zu Zeile n:

$$(-1)^{n-i}$$

Tausche Spalte j zu Spalte n:

$$(-1)^{n-j}$$

Insgesamt: $(-1)^{n-i} \cdot (-1)^{n-j} = (-1)^{2n-i-j} = (-1)^{i+j}$ □

Beispiel: (Fortsetzung)

$$\det(\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} = 2 \cdot (-18) + 0 \cdot (-11) + 1 \cdot (-10) = -46$$

(Man sucht sich möglichst Zeilen mit vielen 0 drin)

12.3 Invertierbarkeit von Matrizen

Für $i = k$ (Diagonale):

$$\det(A) = \sum a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Für $i \neq k$:

$$\sum_j a_{ij} \cdot A_{kj} = \underbrace{\det(\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix})}_{=0}$$

$$\Gamma := (A_{ji}) = (A_{ij})^t$$
$$A\Gamma = (\det(A)) \cdot I$$

Inverse Matrix bestimmen ohne Gauß-Elimination:

$$\frac{1}{\det(A)} \Gamma = A^{-1}$$

13 Lineare Algebra 1 vom 18.11.2008

Orientierungsprüfung: Anmeldung bis zum 19.12.2008, anmeldung online (noch nicht freigeschaltet).

13.1 Determinante einer 3×3-Matrix - Regel von Sarrus

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Bei den Gegendiagonalen subtrahieren

13.2 Wiederholung

Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix.

$$(-1)^{i+1} \det M_{ij} = A_{ij}$$

$$\Gamma := (A_i j)^t_{n\times n} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \Gamma$$

13.2.1 Anwendung Cramersche Regel zur Lösung inhomogener Gleichungssystem

$A \cdot x = b$, A ist eine $n \times n$-Matrix, invertierbar

$$\Rightarrow x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{\det A} \cdot \Gamma \cdot b$$

$$(\det(A)) \cdot X_i = \sum_j \Gamma_{ij} \cdot b_j = \sum_j A_{ji} b_j \underset{\text{laplace}}{=} \det(a^i \dots a^{i-j} b a^{i+1} \dots a^n)$$

$$x_i = \frac{\det(a^1 \dots a^{i-1} b a^{i+1} \dots a^n)}{\det(A)}$$

13.3 Geometrische Interpretation der Determinante

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear (Endomorphismus), kann man sich als $n \times n$-Matrix vorstellen.

Satz 13.1. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, "vernünftig" (z.B. Jordan-messbar). Dann gilt:*

$$vol(F(A)) = |\det(F)| \cdot vol(A)$$

Beweisskizze.

$$L_1(x_1,\dots,x_n) \coloneqq (\lambda x_1, x_2,\dots,x_n), \lambda \neq 0$$
$$L_2(x_1,\dots,x_n) \coloneqq (x_1 + x_2, x_2,\dots,x_n)$$
$$L_3(x_1,\dots,x_n) \coloneqq (x_1,\dots,x_{i+1}, x_i,\dots,x_n)$$

(Elementarmatrizen)

Sei $\epsilon > 0$. Überdecke A durch n-dimensionale Rechtecke R_i mit folgenden Eigenschaften:

$$\sum_{R_i \cap A \neq \emptyset} \operatorname{vol}(R_i) - \operatorname{vol}(A) < \epsilon$$

und

$$\operatorname{vol}(A) - \sum_{R_i \subset A} \operatorname{vol}(R_i) < \epsilon$$

$$\det(L_1) = \lambda, \det(L_2) = 1, \det(L_3) = -1$$

$$\operatorname{vol}(R_i) = |a_1 - b_1| \cdot |a_2 - b_2| \cdot \dots \cdot |a_n - b_n|$$
$$R_i = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$
$$\operatorname{vol}(L_1(R_i)) = |\lambda a_1 - \lambda b_1| \cdot |a_2 - b_2| \cdot \dots \cdot |a_n - b_n|$$
$$= \underbrace{|\lambda|}_{|\det(L_1)|} \cdot \underbrace{|a_1 - b_1| \cdot \dots \cdot |a_n - b_n|}_{\operatorname{vol}(R_i)}$$

Bei L_2 und L_3 ändert sich das Volumen nicht:

$$\operatorname{vol}(L_2(R_i)) = \operatorname{vol}(R_i) = |\det(L_2)| \cdot \operatorname{vol}(R_i)$$
$$\operatorname{vol}(L_3(R_i)) = \operatorname{vol}(R_i) = |\det(L_3)| \cdot \operatorname{vol}(R_i)$$

$k = 1, 2, 3$:

$$|\det(L_k)| \cdot \sum_{R_i \subset A} \operatorname{vol}(R_i) = \sum_{R_i \subset A} \operatorname{vol}(L_k(R_i)) \leqslant \operatorname{vol}(L_k(A)) \leqslant \sum_{R_i \cap A \neq \emptyset} \operatorname{vol}(L_k(R_i))$$
$$= \sum_{R_i \cap A \neq \emptyset} |\det(L_k)| \cdot \operatorname{vol}(R_i) = |\det(L_k)| \cdot \sum_{R_i \cap A \neq \emptyset} \operatorname{vol}(R_i)$$

$\Rightarrow$ Differenz $< |\det(L_k)| \cdot 2\epsilon$
ϵ beliebig $\Rightarrow \operatorname{vol}(L_k(A)) = |\det(L_k)| \cdot \operatorname{vol}(A)$

Jedes lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein Produkt von Elementarmatrizen

z.B. Wenn $F = L_2 L_3 L_1$:

$$\operatorname{vol}(F(A)) = \operatorname{vol}(L_2 \circ L_3 L_1(A)) = |\det(L_2)| \cdot \operatorname{vol}(L_3 \circ L_1(A)) = |\det(L_2)| \cdot |\det(L_3)| \cdot \operatorname{vol}(L_1(A))$$
$$= |\det(L_2)| \cdot |\det(L_3)| \cdot |\det(L_1)| \cdot \operatorname{vol}(A)$$
$$= |\det(L_2 L_3 L_1)| \cdot \operatorname{vol}(A) = |\det(F)| \cdot \operatorname{vol}(A)$$

Bemerkung 13.2.

$$A := \textit{Einheitswürfel aufgespannt von } e_1, e_2, \dots, e_n$$

$$vol(A) = 1$$

$F(A)$ ist das Parallelotop, aufgespannt von $F(e_1), \dots, F(e_n)$

Satz 13.3.

$$vol(Parallelotop) = |\det(F)|$$

Beispiel anhand eines Parallelogramms:

$$\text{Flächeninhalt(Parallelogramm)} = \det(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) = 6 - 1 = 5$$

13.4 Determinante von Endomorphismen

$$F : V \stackrel{\text{lin}}{\to} V, \dim(V) < \infty$$

Sei $\mathscr{B}$ eine Basis für V. Matrixdarstellung $M_{\mathscr{B}}(F)$

Definition 13.4. $\det(F) := \det(M_{\mathscr{B}}(F))$

Wohldefiniert? d.h. ist $\det(F)$ unabhängig von $\mathscr{B}$? Ist $\mathscr{B}'$ eine andere Basis, dann existiert eine invertierbare Matrix S mit $M_{\mathscr{B}'}(F) = S \cdot M_{\mathscr{B}}(F)S^{-1}$ (Transformationsformel)

$$\det(M_{\mathscr{B}'}(F) = \det(S \cdot M_{\mathscr{B}}(F)S^{-1} = \det(S) \cdot \det(M_{\mathscr{B}}(F)) \cdot \det(S^{-1})$$

$$= \det(S) \cdot \det(M_{\mathscr{B}}(F)) \cdot \frac{1}{\det S} = \det(M_{\mathscr{B}}(F))$$

13.5 Eigenwerte & Eigenvektoren

Frage: Gegeben sei eine lineare Abbildung $F : V \to V$, wann existiert eine Basis $\mathscr{B}$ von V, sodass $M_{\mathscr{B}}(F)$ eine Diagonalmatrix ist?

$$\text{Diagonalmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bemerkung 13.5. *Es existieren immer zwei Basen $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ mit*

$$M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r = Rg(F)$$

Angenommen

$$\underbrace{M_{\mathscr{B}}(F)}_{=(a_{ij})} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
$$\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$
$$F(v_j) = \sum_i a_{ij} v_i = \lambda_j v_j$$

Definition 13.6. Gilt $F(v) = \lambda v$ für $v \in V, v \neq 0$ und $\lambda \in K$, dann heißt λ Eigenwert (EW) von F und v Eigenvektor (EV) zum Eigenwert λ.

Bemerkung 13.7. *$\lambda = 0$ kann Eigenwert sein, aber $v = 0$ ist nie ein Eigenvektor (laut Definition $v \neq 0$).*

Bemerkung 13.8. *F ist diagonalisierbar (d.h. es gibt eine Matrix, sodass man auf die Diagonalmatrix kommt) $\Leftrightarrow$ F hat eine Basis aus Eigenvektoren.*

Hinreichendes Kriterium: Sind $v_1, \ldots, v_k$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, dann sind $v_1, \ldots, v_k$ l.u.

Beweis. Induktion: $k = 1 : F(v_1) = \lambda_1 v_1, v_1 \neq 0 \Rightarrow \{\underbrace{v_1}_{\neq 0}\}$ l.u.

Induktionsschritt:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0$$
$$\underbrace{0}_{F(0)} = \lambda_k \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 = \sum \alpha_i \lambda_k v_i$$
$$F(0) = F(\sum \alpha_i v_i) = \sum \alpha_i F(v_i) = \sum \alpha_i \lambda_i v_i$$
$$\alpha_1 \lambda_k v_1 + \alpha_2 \lambda_k v_2 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_k v_{k-1} + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$$
$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$$
$$\alpha_1(\lambda_k - \lambda_1) v_1 + \alpha_2(\lambda_k - \lambda_2) v_2 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) v_{k-1} = 0$$

Wegen Induktionsvoraussetzung:

$$\alpha_1(\underbrace{\lambda_k - \lambda_1}_{\neq 0}) = 0, \ldots, a_{k-1}(\underbrace{\lambda_k - \lambda_{k-1}}_{\neq 0}) = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$$

Durch Einsetzen:

$$\Rightarrow \alpha_k v_k = 0$$

Da v_k ein Eigenvektor ist $v_k \neq 0$, somit $\Rightarrow \alpha_k = 0$ Somit linear unabhängig □

Sobald eine 2×2-Matrix also zwei verschiedene Eigenwerte hat ist sie diagonalisierbar.

14 Lineare Algebra 1 vom 20.11.2008

$$F : V \to V \text{ Endomorphismus}$$
$$\lambda \in K \text{ EW} : F(v) = \lambda v, \text{ für ein } v \neq 0$$
$$\text{eig}(F, \lambda) := \{v \in V | F(v) = \lambda v\}$$

$\text{eig}(F, \lambda)$ ist ein UVR von V:

$$0 \in \text{eig}(F, \lambda)$$
$$F(v_1) = \lambda v_1, F(v_2) = \lambda v_2 \Rightarrow F(v_1 - v_2) = F(v_1) + F(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$
$$Fv = \lambda v. F(\mu v) = \mu F(v) = \mu(\lambda v) = \lambda(\mu v)$$

$\text{eig}(F, \lambda)$ ist der Eigenraum von F zu λ. Wenn λ kein Eigenwert ist, ist der Eigenraum 0.

Proposition 14.1.

$$eig(F, \lambda) = \ker(F - \lambda \cdot id_v)$$

Beweis.

$$F(v) = \lambda v \Leftrightarrow F(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow v \in \ker(F - \lambda id)$$
$$F(v) - \lambda id(v) = (F - \lambda id)(v)$$

□

Proposition 14.2.

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow eig(F, \lambda_1) \cap eig(F, \lambda_2) = \{0\}$$

Beweis.

$$v \in \text{eig}(F, \lambda_1) \cap \text{eig}(F, \lambda_2)$$
$$F(v) = \lambda_1 v$$
$$F(v) = \lambda_2 v$$
$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v = 0 \Rightarrow v = 0$$

□

Proposition 14.3.

$$\lambda \textit{Eigenwert von } F \Leftrightarrow \det(F - \lambda \cdot id_v) = 0$$

Beweis.

$$\lambda \text{ Eigenwert von F } \Leftrightarrow \text{eig}(F, \lambda) \neq 0 \overset{1}{\Leftrightarrow} \ker(F - \lambda id_v) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rg}(F - \lambda id) < n = \dim(V)$$
$$\Leftrightarrow \det(F - \lambda id) = 0$$

□

14.1 Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus

Sei $\mathscr{B}$ eine Basis von V.

$$\underbrace{A}_{n\times n} := M_{\mathscr{B}}(F)$$

$$P_F(t) := \det(A - t\cdot I_n) = \det(\begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-t \end{pmatrix})$$

P_F ist das charakteristische Polynom vom Grad n. Die Nullstellen des Polynoms sind die Eigenwerte (siehe oben, Proposition 3).

$$M_{\mathscr{B}}(F - \lambda id_v) = A - \lambda I_n$$
$$\Rightarrow P_F(t) = \det(F - tid)$$

Da die Determinante eines Endomorphismus wohldefiniert ist, ist auch das charakteristische Polynom wohldefiniert.

Beispiel:

$$n = 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$P_F(t) = \det(A - tI_2) = \det(\begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & 2-t \end{pmatrix}) = (1-t)\cdot(2-6)-6 = 2-3t+t^2-6 = t^2-3t-4$$

Nullstellen:

$$P_F(t) = t^2 - 3t - 4 = (t-4)(t+1)$$

$\Rightarrow$ Nullstellen sind 4 und -1
$\Rightarrow$ Die Eigenwerte von $A = F$ sind $\lambda = 4, -1$.

14.1.1 Hinreichendes Kriterium für Diagonalisierbarkeit

Bei einer 2×2-Matrix braucht man 2 verschiedene Eigenwerte, somit ist A diagonalisierbar, das bedeutet:

$$\exists \text{ invertierbare Matrix } S : SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

14.2 Praktische Bestimmung der Eigenräume

$$\operatorname{eig}(F, \lambda) = \ker(F - \lambda id) \Rightarrow \text{ Lösung von homogenen Gleichungssystemen}$$

$\lambda = 4$

$$A - 4I_2$$
$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = \frac{2}{3}x_2$, x_2 beliebig.

$$\underbrace{< \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} >}_{\text{eig}(F,4)}$$

$\lambda = -1$

$$A + I_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -x_2$, x_2 beliebig

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} >= \text{eig}(F, -1)$$

14.2.1 Notwendige Bedingung für Diagonalisierbarkeit

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Angenommen, A ist diagonalisierbar. $\Rightarrow \exists$ invertierbare Matrix $S : SAS^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$P_A(t) = \det(A - tI_n) = \det(SAS^{-1} - S(tI_n)S^{-1}) = \det(\text{diag}(\lambda_1 - t, \lambda_2 - t, \dots, \lambda_n - t))$$
$$= (\lambda_1 - t) \cdot (\lambda_2 - t) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - t)$$

Wir sehen: A diagonalisierbar $\Rightarrow P_A(t)$ zerfällt als Produkt von Linearfaktoren.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \underbrace{t^2 + I}_{\geqslant 1}$$

$\Rightarrow$ keine Nullstellen über $\mathbb{R}$, also ist A nicht diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

Über $\mathbb{C}$: $P_A(t) = t^2 + 1 = (t-i)(t+i)$ zerfällt in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$, in $\mathbb{C}$ ist sie also diagonalisierbar.

$$\text{Eigenwert} = \pm i$$

Hinreichende Bedingung $\Rightarrow$ A diagonalisierbar über $\mathbb{C}$: $\exists$ inverse Matrix S : $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Bemerkung 14.4. *Nicht jede Matrix über $\mathbb{C}$ ist diagonalisierbar (Bestes allgemeine Resultat: Jordansche Normalform). Die notwendige Bedingung ist nicht hinreichend.*

Problem: Mehrfachnullstellen des charakteristischen Polynomns.

14.2.2 Polynome (Einschub)

Division mit Rest

$P, Q \in K[t]$ (= P und Q seien zwei Polynome mit einer Variablen t mit Koeffizienten in K)

$$\exists! q, r \in K[t] : P = Qq + r, \deg(r) < \deg(Q)$$

Behauptung: Sei λ eine Nullstelle von $P \in K[t]$, dann $\exists Q \in K[t] : P(t) = (t-\lambda)Q(t)$.

Beweis.

$$\exists! Q, r := P = (t-\lambda)Q + r, \deg(r) < \deg(t-\lambda) = 1 \Rightarrow \deg(r) = 0$$

$$\Rightarrow r(t) = a_0, a_0 \in K$$
$$P(t) = (t-\lambda)Q(t) + a_0$$
$$0 = P(\lambda) = (\lambda - \lambda)Q(\lambda) + a_0 = a_0$$
$$\Rightarrow a_0 = 0$$
$$P(t) = (t-\lambda)Q(t)$$

□

Vielfachheit μ für eine Nullstelle

$\lambda \in K$, Definition:

$$\mu(\underbrace{P}_{\in K[t]}, \lambda) := max\{r \in \mathbb{N} | P(t) = (t-\lambda)^r Q(t), Q \in K[t]\}$$

$$\mu(P, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \text{ keine Nullstelle von } P$$

Zerfällt P in Linearfaktoren, dann:

$$\sum_\lambda \mu(P, \lambda) = \deg(P)$$

14.2.3 Fundamentalsatz der Algebra (Gauß)

Jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg(P) > 0$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ Jedes $P \in \mathbb{C}[t]$ zerfällt in Linearfaktoren.

$$P(t) = a \cdot (t-\lambda_1) \cdot (t-\lambda_2) \cdot \dots \cdot (t-\lambda_n)$$

$$\mathbb{R} : P \in \mathbb{R}[t]$$

$$P = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\dots(t-\lambda_n) \cdot \underbrace{Q(t)}_{\text{keine reellen Nullstellen}}$$

$Q(t)$ zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren. Sei λ eine Nullstelle von Q. $\lambda = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

$$Q(\overline{\lambda}) = \overline{Q(\lambda)} = \overline{0} = 0$$

$\Rightarrow \overline{\lambda}$ ist eine Nullstelle von Q. Q enthält $(t-\lambda)(t-\overline{\lambda}) = t^2 - \underbrace{(\lambda + \overline{\lambda})}_{2a} t + \underbrace{\lambda\overline{\lambda}}_{|\lambda|^2 = a^2+b^2}$

$$= t^2 - 2at + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[t]$$

Proposition 14.5.

$$P \in \mathbb{R}[t] : P = a(t-\lambda_1) \cdot \dots \cdot (t-\lambda_n) \cdot Q_1(t) \cdot \dots \cdot Q_k(t)$$

$$\lambda_i \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{Q}_j \in \mathbb{R}[t]$ *quadratisch*

$$F : V \to V \text{ endomorphismus}$$

Lemma 14.6.

$$\lambda \textit{ Eigenwert von } F \Rightarrow \mu(P_F, \lambda) \geqslant \dim(eig(F, \lambda))$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = t^2 = (t-0)^2$$

$$\mu(P_A, 0) = 2$$

$$\dim(\mathrm{eig}(A,0)) = \dim(\ker(A - 0I)) = 2 - \mathrm{Rg}(A) = 2 - 1 = 1$$

Angenommen:

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lightning$$

$\Rightarrow A$ ist nicht diagonalisierbar.

15 Lineare Algebra 1 vom 25.11.2008

$$F : V \to V \text{ Endomorph.}$$

$$P_F(t) \text{ charakteristisches Polynom}$$

$$\text{eig}(F, \lambda)$$

Lemma 15.1.

$$\mu(P_F, \lambda) \geqslant \dim(eig(F, \lambda))$$

Beweis. Sei $\{v_1, \ldots, v_r\}$ eine Basis von $\text{eig}(F, \lambda)$.
Ergänze zu einer Basis $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ von V.

$$M_{\mathscr{B}}(F) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda & 0 & X \\ 0 & 0 & \lambda & \\ \vdots & \vdots & \vdots & A \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

□

Bemerkung 15.2.

$$\det(\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}) = \det(A) \cdot \det(C)$$

$$P_F(t) = \det(M_{\mathscr{B}}(F) - t \cdot I) = (\lambda - t)^r \cdot Q(t)$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = t^2$$

$$\dim(\text{eig}(A)) = 2 - \text{Rg}(A) = 2 - 1 = 1$$

$$\mu(P_A, 0) = 2 > 1$$

15.1 Diagonalisierbarkeit

Satz 15.3 (Satz (notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Diagonalisierbarkeit):).

1. *F diagonalisierbar*

2. *$\Leftrightarrow$ charakteristisches Polynom $P_F(t)$ zerfällt in Linearfaktoren und $\mu(P_F, \lambda) = \dim(eig(F, \lambda)) \forall$ EW λ von F*

3. *$\Leftrightarrow V = eig(F, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus eig(F, \lambda_k)$, wobei $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von F sind.*

Beweis.

- $(1) \Rightarrow (2)$

F diagonalisierbar $\Rightarrow \exists$ Basis $\mathscr{B} = \{v_1^{(1)}, \dots, v_r^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_{r_2}^{(2)}, \dots, v^{(k)}, \dots, v_{r_k}^{(}k)\}$

sodass:

$$M_{\mathscr{B}}(F) = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_2}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{r_2}, \dots, \underbrace{\lambda_k, \dots, \lambda_k}_{r_k})$$

Behauptung: $\{v_1^{(1)}, \dots, v_r^{(1)}\}$ ist eine Basis für $\operatorname{eig}(F, \lambda_1)$. Die lineare Unabhängigkeit ist klar, da die größere Menge an allen Vektoren bereits eine Basis bildet.
Zu zeigen: Erzeugendensystem.

$$v \in \operatorname{eig}(F, \lambda_1)$$

$$\begin{aligned}
v &= \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i^1 v_i^{(1)} + \sum_i \alpha_i^{(2)} v_i^{(1)} + \dots \\
F(v) = \lambda_1 v &= \sum \lambda_1 \alpha_i^{(1)} v_i^{(1)} + \sum \lambda_1 \alpha_i^{(2)} v_i^{(2)} + \dots \\
&= \sum \alpha_i^{(1)} F(v_1^{(1)}) + \sum \alpha_i^{(2)} F(v_i^{(2)}) + \dots \\
&= \sum \lambda_1 \alpha_i^{(1)} v_i^{(1)} + \sum \lambda_2 \alpha_i^{(2)} v_i^{(2)} + \sum \lambda_3 \alpha_i^{(3)} v_i^{(3)} + \dots \\
&\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0,\text{ da } \lambda_1 \neq \lambda_2} \alpha_i^{(2)} = 0 \\
&\Rightarrow \alpha_i^{(2)} = 0 \forall i \\
&\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_3)}_{\neq 0} \alpha_3 = 0 \\
&\Rightarrow \alpha_i^{(3)} = 0 \forall i \\
&\vdots \\
&\Rightarrow v = \sum \alpha_i^{(1)} v_i^{(1)}
\end{aligned}$$

Analog ist $\{v_1^{(j)}, \dots, v_{r_j}^{(j)}\}$ eine Basis für $\operatorname{eig}(F, \lambda_j) \forall j$.

$$\begin{aligned}
v &= \langle\{v_1^{(1)}, \dots, v_r^{(1)}\}\rangle \oplus \langle\{v_1^{(2)}, \dots, v_{r_2}^{(2)}\}\rangle \oplus \dots \oplus \langle\{v^k, \dots, v_{r_k}^k\}\rangle \\
&= \operatorname{eig}(F, \lambda_1) \oplus \operatorname{eig}(F, \lambda_2) \oplus \dots \oplus \operatorname{eig}(F, \lambda_k)
\end{aligned}$$

- (3) $\Rightarrow$ (2)
  Sei $\{v_1^{(j)}, \dots, v_{r_j}^{(j)}\}$ eine Basis für $\operatorname{eig}(F, \lambda_j)$.

$$V = \langle \{v_1^{(1)}, \dots, v_{r_1}^{(1)}\} \oplus \cdots \oplus \{v_1^{(k)}, \dots, v_{r_k}^{(k)}\} \rangle$$
$$\Rightarrow \underbrace{\mathscr{B}}_{\text{Basis von } V} := \{v_1^{(1)}, \dots, v_r^{(1)}, \dots, v^{(k)}, \dots, v_{r_k}^{(k)})\}$$
$$M_{\mathscr{B}}(F) = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{r_1}, \dots, \underbrace{\lambda_k, \dots, \lambda_k}_{r_k})$$
$$P_F(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1} \cdot \cdots \cdot (\lambda_k - t)^{r_k} (r_j = \dim(\operatorname{eig}(F, \lambda_j))$$

- (2) $\Rightarrow$ (3)
  Sei $\{v_1^{(j)}, \dots, v_{r_j}^{(j)}\}$ eine Basis für $\operatorname{eig}(F, \lambda_j)$

$$P_F(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1} \cdot \cdots \cdot (\lambda_k - t)^{r_k}$$

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = \deg(P_F(t)) = n$$

$$\mathscr{B} := \bigcup_j \{v_1^{(j)}, \dots, v_{r_j}^{(j)} \text{ ist l.u.}$$
$$|\mathscr{B}| = r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n = \dim(V)$$

  $\Rightarrow \mathscr{B}$ ist eine unverlängerbare l.u. Menge
  $\Rightarrow \mathscr{B}$ Basis für V.

- (3) $\Rightarrow$ (1)

  $\{v_1^{(j)}, \dots, v_r^{(j)}\}$ sei eine Basis von $\operatorname{eig}(F, \lambda_j)$. $\mathscr{B} := \bigcup_j B_j$ ist Basis von V.

$$M_{\mathscr{B}}(F) = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{r_1}, \dots, \underbrace{\lambda_k, \dots, \lambda_k}_{r_k})$$

□

15.2 Algorithmus zur Diagonalisierung

Sei $\dim(V) < \infty$, $\mathscr{A}$ eine Basis von V, $F : V \to V$ endomorphimus, $A := M_{\mathscr{A}}(F)$
Berechne das charakteristische Polynom P_F.
Fallunterscheidung:

1: Charakteristisches Polynom zerfällt nicht in Linearfaktoren F ist nicht diagonalisierbar.

2: Charakteristisches Polynom zerfällt in Linearfaktoren Bestimme Basen für alle $\text{eig}(F, \lambda), \lambda$ EW von F.

Fallunterscheidung:

1:

$$\exists \text{ EW } \lambda : \mu(P_F, \lambda) \neq \dim(\text{eig}(F, \lambda))$$

F ist nicht diagonalisierbar.

2:

$$\forall \text{ EW } \lambda : \mu(P_F, \lambda) = \dim(\text{eig}(F, \lambda))$$

$$\mathscr{B} := \bigcup \text{ aller Basen für die eig}(F, \lambda), \lambda \text{ EW}$$

$$\text{Spalten } S^{-1} := \text{ Koeffizienten der Vektoren in } \mathscr{B} \text{ bezüglich der Basis } \mathscr{A}$$

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

15.2.1 Anwendung

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{20} = ?$$

Die Rechnung wird sehr viel einfacher, wenn die Matrix diagonalisierbar ist:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{20} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{20} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{20} \end{pmatrix}$$

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S$$

$$A^{20} = A \cdot A \cdot A \cdot \cdots = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S \cdot S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S \cdot S^{-1} \cdots = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^{20} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{20} \end{pmatrix}^{20} S$$

Man braucht also S und S^{-1}.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Diagonalisiere A, wenn möglich.

$$P_A(t) = \det(\begin{pmatrix} 1-t & -3 & 3 \\ 3 & -5-t & 3 \\ 6 & -6 & 4-t \end{pmatrix}) = -(t+2)^2(t-4)$$

$$\Rightarrow 2 \text{ EW } : \lambda = -2, \mu(P_A - 2) = 2, \lambda = 4, \mu(P_A, 4) = 1$$

$$\mathrm{eig}(A,-2) : \begin{pmatrix} 1-(-2) & -3 & 3 \\ 3 & -5-(-2) & 3 \\ 6 & -6 & 4-1(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

x_2, x_3 beliebig.

$$\mathrm{eig}(A,-2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\mu(P_A - 2) = 2 = \dim(\mathrm{eig}(A,-2))$$

$$\mathrm{eig}(A,4) : -x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

x_3 beliebig.

$$\mathrm{eig}(A,4) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\underbrace{\mathscr{B}}_{\text{Basis für } V=\mathbb{R}^3} := \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow SAS^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

16 Lineare Algebra 1 vom 27.11.2008

16.1 Trigonalisierung

Definition 16.1. Ein Endomorphismus $F : V \to V, \dim(V) < \infty$ ist trigonalisierbar, wenn $\exists$ Basis $\mathscr{B}$ von V, sodass

$$M_{\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}$$

(d.h. unterhalb der Diagonale Null)

Definition 16.2. Eine aufsteigende Kette $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n$ von UVR von V, mit $\dim(V_i) = i \forall i = 0, \dots, n$ heißt Fahne.

$$(\Rightarrow V_0 = \{0\}, V_n = V)$$

Definition 16.3. Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus. Eine Fahne $\{v_i\}$ ist F-invariant, wenn $F(V_i) \subset V_i \forall i$

Lemma 16.4. *F ist trigonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\exists F$-invariante Fahne.*

Beweis. "$\Rightarrow$") $\exists$ Basis $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ von V, sodass $M_{\mathscr{B}}(F)$ trigonal.

$$V_i := \langle v_1, \dots, v_i \rangle \Rightarrow \{v_i\} \text{ ist eine Fahne}$$

Zu zeigen: Die Fahne ist F-invariant:

$$1 \leqslant j \leqslant i, F(v_j) \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & V \\ \uparrow {\scriptstyle \phi_{\mathscr{B}} \cong} & & \uparrow {\scriptstyle \phi_{\mathscr{B}} \cong} \\ K^n & \xrightarrow{M_{\mathscr{B}}(F)} & K^n \end{array}$$

$$\phi_{\mathscr{B}}(e_j) = v_j$$

$$F(v_j) = F\phi_{\mathscr{B}}(e_j) = \phi_{\mathscr{B}} M_{\mathscr{B}}(F)(e_j) = \phi_{\mathscr{B}}(\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) \text{ j-te Zeile}$$

$$= \phi_{\mathscr{B}}(\sum_{k=1}^{i} a_{kj} e_k) = \sum_{k=1}^{i} a_{kj} \phi_{\mathscr{B}}(e_k) = \sum_{k=1}^{i} a_{kj} v_k$$

"$\Leftarrow$") $\{v_i\}$ F-invariante Fahne. Wähle eine Basis $\{v_1\}$ für V_1. Ergänze zu einer Basis $\{v_1, v_2\}$ für V_2. etc.
$\Rightarrow$ Basis $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ für $V_n = V$. $M_{\mathscr{B}}(F)$ ist trigonal. □

Satz 16.5. *F ist trigonalisierbar $\Leftrightarrow$ charakteristische Polynom $P_F(t)$ zerfällt in Linearfaktoren*

Beweis. "$\Rightarrow$") $\exists$ Basis $\mathscr{B}$ von V,

$$M_{\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P_F(t) = \det(\begin{pmatrix} a_{11}-t & * & * & * \\ 0 & a_{22}-t & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}-t \end{pmatrix}) = (a_{11}-t) \cdot \cdots \cdot (a_{nn}-t)$$

"$\Leftarrow$") P_F zerfalle in Linearfaktoren.
Idee:

1. Wähle λ_1 EW mit EV v_1, Setze $V_1 := \langle v_1 \rangle$
2. $V = V_1 \oplus W$
3. Definiere $G =$ Projektion von F auf W
4. λ_2 Eigenwert von G mit Eigenvektor w_2, $V_2 := \langle v_1, w_2 \rangle$

Führen wir diese also durch:

Induktion nach n.
Für $n = 1 : M_{\mathscr{B}}(F)$ trigonal für jede Basis $\mathscr{B}$.
Sei λ_1 ein Eigenwert von F und v_1 ein Eigenvektor zu λ_1. $V_1 := \langle v_1 \rangle$
Ergänze $\{v_1\}$ zu einer Basis $\mathscr{B} = \{v_1, w_2, \ldots, w_n\}$ von V.

$$W := \langle \{w_2, \ldots, w_n\} \rangle \Rightarrow V = V_1 \oplus W$$

Definition:

$$G : W \to W : w \in W, F(w) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n$$

$$G(w) := \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n \in W, G \text{ ist linear}$$

$$H : W \to V_1, H(w) := \alpha_1 v_1 \Rightarrow H \text{ linear}$$

$$M_{\mathscr{B}}(F) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ 0 & B \\ 0 & B \\ \vdots & B \\ 0 & B \end{array}\right)$$

$$B = M_{\mathscr{B}-\{v_1\}}(G)$$

$$\underbrace{P_F(t)}_{\text{zerfällt in Lin.faktoren}} = (\lambda_1 - t) \cdot \det(B - tI_{n-1}) = (\lambda_1 - t) \cdot P_G(t)$$

$$\Rightarrow P(G) \text{ zerfällt auch in Linearfaktoren}$$

Induktionsannahme $\Rightarrow$

$$\exists G\text{-invariante Fahne } \{W_i\} \text{ in } W \text{ (Lemma)}$$

Setze:

$$(V_1 = \langle v_1 \rangle)$$

$$(V_{i+1} := V_i \oplus W_i \Rightarrow \{V_i\} \text{ ist eine Fahne}$$

$\{V_i\}$ ist F-invariant:

$$v \in V_{i+1} \Rightarrow v = \alpha v_1 + w_i, w_i \in W_i, \alpha \in K$$

$$F(v) = \alpha F(v_1) + F(w_i) = \underbrace{\alpha\lambda_1 v_1 + \underbrace{H(w_i)}_{\in V_1}}_{\in V_1} + \underbrace{G(w_i)}_{\in W_i (G-\text{invarianz})}$$

□

Korrolar 16.6. *Über $K = \mathbb{C}$ ist jeder Endomorphismus trigonalisierbar.*

Beweis. Über $\mathbb{C}$ zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren laut Fundamentalsatz der Algebra. □

16.2 Jordansche Normalenform

Definition 16.7. Eine quadratische Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

heißt Jordan-Matrix.

Definition 16.8. Eine Matrix ist in Jordanscher Normalform, wenn sie von der Form

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_n \end{pmatrix}$$

ist, wobei die J_i Jordan-Matrizen sind.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

ist in Jordanscher Normalenform (JNF).

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist in JNF

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ist nicht in JNF.

Satz 16.9. *$F : V \stackrel{lin.}{\to} V$, V über $K, \dim(V) < \infty$. Zerfällt P_F in Linearfaktoren, dann $\exists$ Basis $\mathscr{B}$ von V, sodass $M_{\mathscr{B}}(F)$ in JNF ist.*

Korrolar 16.10. *Über $\mathbb{C}$ kann jede quadratische Matrix durch Basiswechsel in JNF transformiert werden.*

Anwendung: Berechnung von e^A, A quadratische Matrix (über $\mathbb{C}$)?

$$e_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Definition 16.11. Eine Folge $A_1, A_2, \dots$ von Matrizen konvergiert gegen eine Matrix A, wenn $\forall (i, j)$ die Folge der (i, j)-Einträge gegen den (i, j) von A konvergiert. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ konvergiert, wenn die Folge der Partialsummen $A_0, A_0 + A_1, A_0 + A_1 + A_2, \dots$ konvergiert.

Definition 16.12.

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

(konvergiert für jede Matrix A)

1. $S \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty} S \cdot A_k$ und $(\sum^{\infty} A_k) \cdot S = (\sum^{\infty} A_k \cdot S)$
2. $S \cdot e^A \cdot S^{-1} = e^{SAS^{-1}}$ da $Se^AS^{-1} = S(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k) S^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S \cdot A^k \cdot S^{-1} = \sum \frac{1}{k!} (SAS^{-1})^k = e^{SAS^{-1}}$

3. Wenn $AB = BA \Rightarrow e^A \cdot e^B = e^{A+B}$

Außerdem: D Diagonalmatrix. $e^D =?$. $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$$e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \sum \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum \frac{1}{k!}\lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sum \frac{1}{k!}\lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

17 Lineare Algebra 1 vom 02.12.2008

$$e^A := I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots$$

1. $$e^{SAS^{-1}} = S \cdot e^A \cdot S^{-1}$$

2. $$AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

3. $$e^{\operatorname{diag}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$$

17.1 Nilpotente Matrizen

Definition 17.1. Eine quadratische Matrix N heißt nilpotent, falls

$$\exists k \geqslant 1 : N^k = 0$$

Beispiel:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^4 = 0$$

Sei N nilpotent $\Rightarrow e^N = I + N + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{3!}N^3 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}N^{k-1} + \underbrace{\frac{1}{k!}N^k + \dots}_{=0}$

Beispiel:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + N + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{3!}N^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung von e^A für eine beliebige komplexe, quadratische Matrix A:
Zuerst bringt man A in die Jordansche Normalenform, bringt sie also auf:

$$SAS^{-1} = \underbrace{J}_{\text{JNF}}$$

Man kann die Matrix dann auch als

$$J = \underbrace{D}_{\text{Diagonalmatrix}} + \underbrace{N}_{\text{nilpotent}}$$

schreiben.

Es gilt $DN = ND$

$$A = S^{-1} \cdot J \cdot S$$

$$e^A = e^{S^{-1} \cdot J \cdot S} \underbrace{=}_{1} S^{-1} \cdot e^J \cdot S = S^{-1} \cdot e^{D+N} \cdot S$$

$$\underbrace{=}_{2} S^{-1} \cdot e^D \cdot e^N \cdot S$$

$$\underbrace{=}_{3,4} S^{-1} \cdot diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \cdot (I + N + \frac{1}{2}N^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}N^{k-1}) \cdot S$$

Beispiel:

$$e^{\begin{pmatrix} \ln 3 & 1 \\ 0 & \ln 5 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} \ln 3 & 0 \\ 0 & \ln 5 \end{pmatrix}} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17.2 Der Satz von Cayley-Hamilton

$K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, V Vektorraum über $K, \dim(V) < \infty$, $F : V \to V$ Endomorphimus
Definition: $F^2 := F \circ F$, allgemein $F^n := \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n}$

$F^n : V \to V$ ist ebenfalls ein Endomorphimus.
Sei $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_l t^l$ ein Polynom mit Koeffizienten in K.

$$P(F) := a_0 \cdot \mathrm{id}_v + a_1 \cdot F + a_2 \cdot F^2 + \cdots + a_l F^l$$

ist ebenfalls ein Endomorphimus $P(F) : V \to V$

Satz 17.2. *Sei P_F das charakteristische Polynom des Endomorphimus $F : V \to V$, dann gilt $P_F(F) = 0 : V \to V$ für $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$*

Beweis.

$$K = \mathbb{C}$$

$$P_F(t) = \underbrace{(\lambda_1 - t) \cdot \cdots \cdot (\lambda_n - t)}_{\text{zerfällt in Linearfaktoren}}$$

$$\Rightarrow \exists \text{ F-invariante Fahne } \{V_i\} \text{ in } V.V_n = V$$

Basisergänzungssatz:

$$\exists \text{ Basis } \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ von } V \text{ mit } \mathscr{B} :=< \{v_1, \ldots, v_i\} >= V_i$$

$$M_{\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Mittels Induktion nach i werden wir zeigen:
Definition:

$$F_i : V \to V$$

$$F_i := (\lambda_1 \mathrm{id} - F) \circ \cdots \circ (\lambda_i \mathrm{id} - F)$$

$$\Rightarrow F_n = P_F(F)$$

$$F_i(V_i) = \{0\}$$

Die Behauptung des Satzes folgt für $i = n : F_n = P_F(F), V_n = V$

Induktionsanfang: $i = 1$:

$$F_1(v_1) = (\lambda_1 \mathrm{id} - F)(v_1) = \lambda_1 v_1 - F(v_1) = 0$$

$i \geqslant 2$: Induktionsannahme: $F_{i-1}(V_{i-1}) = \{0\}$

$$V_i =< v_i > \oplus V_{i-1}$$

Sei $v \in V_i$: Zu zeigen: $F_i(v) = 0$

$$v = \alpha v_i + w, \alpha \in K, w \in V_{i-1}$$

$$F_i(v) = \alpha F(v_i) + F_i(w)$$

$$F_i(w) = F_{i-1} \circ (\lambda_i \mathrm{id} - F)(w) = F_{i-1}(\underbrace{\underbrace{\lambda_i w}_{\in V_{i-1}} - \underbrace{F(w)}_{\in V_{i-1}, \text{ da F-invariant}}}_{\in V_{i-1}}) = 0$$

$$F_i(v_i) = F_{i-1}(\lambda_i v_i - F(v_i)) = F_{i-1}(\lambda_i v_i - (\lambda_i v_i \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k v_k))$$

$$= F_{i-1}(\underbrace{- \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k v_k}_{\in V_{i-1}}) = 0$$

□

17.3 Euklidische und unitäre Vektorräume

Messung von Längen und Winkel. Zusatzstruktur auf Vektorraum: Inneres Produkt

Definition 17.3. Eine Bilinearform ist eine Abbildung $s : V \times W \to K$, wobei V, W K-Vektorräume sind, sodass

$$s(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \lambda s(v_1, w) + \mu s(v_2, w)$$
$$s(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda s(v, w_1) + \mu s(v, w_2) \forall \lambda, \mu \in K, \underbrace{v_1, v_2, v}_{\in V}, \underbrace{w_1, w_2, w}_{\in W}$$

Beispiel:

$$\phi : V \to K \text{ linear }, \psi : W \to K \text{ linear}$$
$$s(v, w) := \phi(v) \cdot \psi(w)$$

Definition 17.4. Eine Bilinearform s heißt **symmetrisch**, wenn $W = V$ und $s(v, w) = s(w, v), v, w \in V$

Definition 17.5. $K = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $F : V \to W$ mit V, W Vektorraum über $\mathbb{C}$ heißt **konjugiert linear** (oder semi-linear), wenn $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2), F(\lambda v) = \overline{\lambda} \cdot F(v)$

Definition 17.6. Eine **Sesquilinearform** ($1\frac{1}{2}$-fach linear) ist eine Abbildung: $s : V \times W \to \mathbb{C}(V, W\ \mathbb{C} - \text{Vektorräume})$ sodass

$$s(-, w) : V \to \mathbb{C} \text{ semilinear} \forall v, w$$
$$s(v, -) : W \to \mathbb{C} \text{ linear}$$

Definition 17.7. Eine Bilinearform $s : V \times W \to K$ ist **nicht-degeneriert**, wenn gilt

$$s(-, w) = 0 : V \overset{\text{lin.}}{\to} K \Rightarrow w = 0$$
$$s(v, -) = 0 : W \overset{\text{lin.}}{\to} K \Rightarrow v = 0$$

Definition 17.8. Eine symmetrische Bilinearform s ist **positiv definit**, wenn $s(v, v) > 0 \forall v \in V (K = \mathbb{R})$.

Über $\mathbb{C}$: Eine Sesquilinearform $s : V \times V \to \mathbb{C}$ ist eine Hermitesche Form, wenn $s(v, w) = \overline{s(w, v)}$

Definition 17.9. Eine Hermitesche Form s heißt **positiv definit**, wenn $s(v, v) > 0 \forall v \in V$ $(s(v, v) = \overline{s(v, v)} \Rightarrow s(v, v) \in \mathbb{R})$.

Definition 17.10. $K = \mathbb{R}$: Ein **inneres Produkt** (oder **Skalarprodukt**) ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform auf V. (V, s) heißt Euklidischer Vektorraum.
Für $K = \mathbb{C}$: Ein **inneres Produkt** (oder **Skalarprodukt**) auf V ist eine positiv definite Hermitesche Form s auf V. (V, s) heißt unitärer Vektorraum.

Beispiel:

$$V = \mathbb{R}^n$$

$s(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ definiert das kanonische innere Produkt auf $\mathbb{R}^n$.

$$V = \mathbb{C}^n$$

$s = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \cdots + \overline{x_n}y_n$ definiert das kanonische innere Produkt auf $\mathbb{C}^n$.

$V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | f \text{ stetig } \}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

$$s : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$s(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

$$s(f,f) = \int_0^1 f^2(t)dt$$

$$\int_0^1 f^2 = 0 \Rightarrow f = 0$$

18 Lineare Algebra 1 vom 04.12.2008

Bei positiv definit gilt: $s(v,v) > 0 \forall v \neq 0$

18.1 Konstruktion von Bilinearformen/Hermiteschen Formen aus Matrizen

Definition 18.1. Eine Matrix A ist symmetrisch, wenn $A^t = A$ (kann nur bei quadratischen Matrizen zutreffen). Das heißt: $(a_{ij}) = (a_{ji})$
Eine komplexe Matrix A ist eine Hermitesche Matrix, wenn $\overline{A}^t = A$ mit $(\overline{A} := (\overline{a}_{ij}))$ (manchmal auch selbstadjungiert genannt).
Eine Hermitesche Matrix muss immer reelle Einträge auf der Diagonalen haben.

Wir arbeiten über $\mathbb{C}$. Sei A eine Hermitesche Matrix $n \times n$, sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\dim(V) = n$.

$$"V = \mathbb{C}" : s\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \overline{x}^t \cdot A \cdot y \Rightarrow s \text{ ist Hermitesche Form}$$

Explizit:

$$s(x,y) = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} y_j \end{pmatrix} = \sum_i \overline{x}_i \sum_j a_{ij} y_j = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \overline{x}_i y_j$$

Hermitesche Symmetrie:

$$s(x,y) = \overline{x}^t \cdot Ay = (\overline{x}^t A y)^t = y^t A^t \overline{x} = y^t \overline{A} \overline{x} = \overline{(\overline{y}^t A x)} = \overline{s(y,x)}$$

Für $\mathbb{R}$: Sei A symmetrisch.

$$s(x,y) := x^t A y \Rightarrow \text{ S ist symmetrische Bilinearform}$$

Umgekehrt: Matrixdarstellung einer Bilinearform/Sesquilinearform

$$s : V \times V \to \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

Sei $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V.

$$M_{\mathscr{B}}(S) := (s(v_i, v_j))_{i,j}$$

$M_{\mathscr{B}}$ ist symmetrisch, wenn s symmetrisch.
$M_{\mathscr{B}}$ ist hermitesch, wenn s hermitesch ist.

Beispiel:

$$V = \mathbb{R}^n, s := \text{ kanonische innere Produkt}$$

$$\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\} \text{ kanonische Basis}$$

$$M_{\mathscr{B}}(s) = (s(e_1, e_j)) = I_n$$

$$s(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Ähnlich für das kanonische innere Produkt auf $\mathbb{C}$.

Wir haben zwei Konstruktionen:
symmetrische Bilinearform/Hermitesche Form.
Durch Anwenden von $M_{\mathscr{B}}(s)$ erhalten wir eine symmetrische Matrix/Hermitesche Matrix.
Durch Anwenden von $s = \overline{x}^t Ay$ gelangen wir wieder zurück.

Diese Operationen sind invers zueinander:
"$\Rightarrow$") Sei eine Basis $\mathscr{B}$ gegeben. Sei s hermitesch

$$v = \sum \alpha_i v_i, w = \sum \beta_i v_i$$

$$(\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}) \cdot \underbrace{M_{\mathscr{B}}(s)}_{=(a_{ij})} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$s(v, w) = s(\sum \alpha_i v_i, \sum \beta_j v_j) = \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \beta_j \underbrace{s(v_i, v_j)}_{=a_{ij}}$$

$$= \overline{\alpha}^t \cdot M_{\mathscr{B}}(s) \cdot \beta$$

"$\Leftarrow$") Gegeben ist A hermitesch.

$$s_A(v, w) := (\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}) A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{\mathscr{B}}(s_A) = A, \text{ da } s_A(v_i, v_j) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{te Stelle}}, 0, 0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{ij}$$

18.2 Transformationsformel für Formen

Proposition 18.2. *Sei $s : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Hermitesche Form. Seien $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ zwei Basen für v. Sei $S := M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(id_V)$*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[rr, "S \cong"] \arrow[dr, "\phi_{\mathscr{A}} \cong"'] & & \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\phi_{\mathscr{B}} \cong"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Dann gilt:

$$M_{\mathscr{A}}(s) = \overline{S}^t \cdot M_{\mathscr{B}}(s) \cdot S$$

Beweis.

$$\mathscr{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}, \mathscr{B} = \{v_1', \ldots, v_n'\}$$

Seien $v, w \in V$.

$$v = \sum \alpha_i v_i = \sum \alpha_i' v_i'$$

$$w = \sum \beta_i v_i = \sum \beta_i' v_i'$$

$$\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha' := \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix}$$

Analog β und β'

$$\alpha' = S\alpha$$

$$\beta' = S\beta$$

$$s(v, w) = \overline{\alpha}^t M_{\mathscr{A}}(s) \cdot \beta$$

$$s(v, w) = \overline{\alpha'}^t M_{\mathscr{B}}(s) \cdot \beta' = \overline{(S\alpha)}^t M_{\mathscr{B}}(s)(S\beta) = \alpha^t(\overline{S} M_{\mathscr{B}}(s)S) \cdot \beta \forall v, w \in V$$

d.h. $\overline{\alpha}^t M_{\mathscr{A}}(s)\beta = \overline{\alpha}^t(\overline{S}^t M_{\mathscr{B}}(s)S)\beta \forall \alpha, \beta$ □

18.2.1 Quadratische Formen

$s : V \times V \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ symmetrische Bilinearform, Hermitesche Form

Definition 18.3.

$$q : V \to \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

$$q(v) := s(v, v)$$

(zugeordnete "quadratische Form")

$$q(\lambda v) = s(\lambda v, \lambda v) = \overline{\lambda}\lambda s(v,v) = |\lambda|^2 q(v)$$

$$\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$$
$$v = \sum \alpha_i v_i$$
$$A = M_{\mathscr{B}}(s)$$

Für $\mathbb{C}$:

$$q(v) = (\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j} a_{ij}\overline{\alpha_i}\alpha_j$$

Für $\mathbb{R}$:

$$q(v) = \sum_i a_{ii}\alpha_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij} \cdot \alpha_i \alpha_j$$

$$q(v+w)-q(v)-q(w) = s(v+w, v+w)-s(v,v)-s(w,w) = s(v,v)+s(v,w)+s(w,v)+s(w,w)-s(v,v)-s(w,w)$$

$$\Rightarrow s(v,w) = \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$$

(Polare Darstellung von s). $\Rightarrow$ s lässt sich aus seiner quadratischen Form vollständig rekonstruieren.

18.3 Längenmessung

18.3.1 Normierte Vektorräume

Definition 18.4. Ein normierter Vektorraum ist ein Paar $(V, ||\cdot||)$, wobei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist und $\underbrace{||\cdot||}_{\text{"Norm"}} : V \to \mathbb{R}$ ist eine Abbildung mit:

1. $$||\lambda \cdot v|| = |\lambda| \cdot ||v||$$
   (Homogenität)

2. $$||v + w|| \leqslant ||v|| + ||w||$$
   (Dreiecksungleichung)

3. $$||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$
   (Definitheit)

Definition 18.5. Sei X eine Menge. Ein Paar (X, d) heißt **metrischer Raum**, wenn $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, sodass:

1. Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x) \forall x, y \in X$
2. $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$
3. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Bemerkung 18.6. *1.* $d(x,y) \geqslant 0$*:*

$$0 = d(x,x) \leqslant d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y)$$

2. $||v|| \geqslant 0$

19 Lineare Algebra 1 vom 09.12.2008

19.0.2 Norm → Metrik

Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum. Wir definieren $d : V \times V \to \mathbb{R}$ als $d(v, w) := ||v - w||$ Wir zeigen, dass d eine Metrik auf V ist.

1. $d(v, w) = ||v - w|| = ||w - v|| = d(w, v) \Rightarrow$ ist symmetrisch
2. $d(v, u) = ||v - u|| = ||v - w + w - u|| \leqslant ||v - w|| + ||w - u|| = d(v, w) + d(w, u)$
3. $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow ||v - w|| = 0 \Leftrightarrow v = w$

Bemerkung 19.1.

$$d(v, w) = \begin{cases} 0 \text{ für } v = w \\ 1 \text{ für } v \neq w \end{cases}$$

(d ist nie aus einer Norm definiert)

19.0.3 Inneres Produkt und Norm

Sei V ein Vektorraum über K ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$). $<,>: V \times V \to K$ sodass

1. $< av_1 + bv_2, w >= a < v_1, w > +b < v_2, w >, a, b \in K, v_1, v_2, w \in V$
2. $< v, w >= \overline{< w, v >}$ (falls $K = \mathbb{R}$ dann $< v, w >=< w, v >$ (symmetrisch))
3. positiv definit, d.h. $< v, v >> 0$ falls $v \neq 0$

Proposition 19.2. *Die Abbildung* $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}, ||v|| := \sqrt{< v, v >}$ *ist eine Norm auf* V.

Lemma 19.3 (Lemma (Cauchy-Schwarz Ungleichung):)**.** *Sei V ein Vektorraum über K ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) und $<,>$ ein inneres Produkt, dann gilt:*

$$| < v, w > | \leqslant ||v|| \cdot ||w|| \forall v, w \in V$$

mit $||v|| = \sqrt{< v, v >}$.
Weiter gilt:

$$| < v, w > | = ||v|| \cdot ||w|| \Leftrightarrow \exists \lambda \in K : v = \lambda w$$

Beweis. Fall 1: $w = 0$ ist trivial klar.
Fall 2: $w \neq 0 \Rightarrow ||w|| \neq 0$. Für alle $\lambda \in K$,

$$0 \leqslant < v - \lambda w, v - \lambda w >=$$

$$< v, v > -\lambda < v, w > -\overline{\lambda} \overline{< v, w >} + \lambda\overline{\lambda} < w, w >$$
$$= ||v||^2 - 2\mathrm{re}(\lambda < v, w >) + \lambda\overline{\lambda}||w||^2$$

Wir setzen $\lambda := \frac{\overline{<v,w>}}{||w||^2}$ (wohldefiniert)
Es gilt:

$$0 \leqslant ||v||^2 - 2\mathrm{re}(\underbrace{\frac{|<v,w>|^2}{||w||^2}}_{\in\mathbb{R}}) + \frac{|<v,w>|^2}{||w||^2} = ||v||^2 - \frac{|<v,w>|^2}{||w||^2}$$

$$\Leftrightarrow |<v,w>| \leqslant ||v|| \cdot ||w|| \forall v, w \in V$$

Wäre $|<v,w>| = ||v|| \cdot ||w||$, dann ist $\lambda = \frac{\overline{<v,w>}}{||w||^w}$ eine Nullstelle von

$$0 =< v - \lambda w, v - \lambda w > \Leftrightarrow v - \lambda w = - \Leftrightarrow v = \lambda w$$

□

Proposition 19.4. $(v, <,>)$. *Dann ist* $||v|| := \sqrt{<v,v>}$ *eine Norm auf* V

Beweis. 1. $||\lambda - v|| = \sqrt{<\lambda v, \lambda v>} =$
$\sqrt{\lambda\overline{\lambda}} \cdot \sqrt{<v,v>} =$
$|\lambda| \cdot ||v||, \lambda \in K, v \in V$

2. $||v+w||^2 =< v+w, v+w >=< v,v > + < v,w > + \overline{<v,w>} + < w,w >=$
$||v||^2 + 2\mathrm{re}(<v,w>) + ||w||^2 \leqslant ||v||^2 + 2|<v,w>| + ||w||^2 \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant}$
$||v||^2 + 2||v|| \cdot ||w|| + ||w||^2 = (||v|| + ||w||^2) \Rightarrow ||v+w|| \leqslant ||v|| + ||w||$

3. $||v|| = 0 \Leftrightarrow < v,v >= 0 \Leftrightarrow v = 0$

□

19.0.4 Orthogonalität

Definition 19.5. Sei $(V, <,>)$ ein Vektorraum. Seien $v, w \in V$, dann heißen v, w orthogonal zueinander $((v \perp w))$, wenn $< v, w >= 0$
Seien $U, W \subset V$ (Untervektorraum von V). Dann ist $U \perp W$ falls $u \perp w \forall u \in U, w \in W$.
Sei $W \subset V$ (Untervektorraum von V). Wir definieren $W^\perp := \{v \in V | v \perp w \forall w \in W\}$ dann ist $w^\perp$ ebenfalls ein Untervektorraum von V.
Eine Menge $\{v_i\}_{i \in I}$ mit $v_i \in V$ heißt orthogonal, wenn $v_i \perp v_j \forall i, j \in I, i \neq j$.
Die Menge $\{v_i\}_{i \in I}$ heißt orthonormal falls $\{v_i\}_{i \in I}$ orthogonal ist und $||v_i|| = 1$ für alle $i \in I$.

Bemerkung 19.6. *Sei* $\{v_i\}_{i \in I}$ *orthogonal und* $v_i \neq 0 \forall i \in I$. *Dann* $\{v_i\}_{i \in I}$ *sind linear unabhängig.*

Beweis. Sei $\lambda_j \in K$ ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$), sodass $\sum \lambda_j v_j = 0$.
Zu zeigen: $\lambda_j = 0 \forall j$.

$$\sum \lambda_j v_j = 0 \Rightarrow 0 =< v_k, \sum \lambda_j v_j > \forall k \in I$$

$$\Rightarrow 0 = \sum \overline{\lambda_j} < v_k, v_j > \Leftrightarrow 0 = \overline{\lambda_k} v_k \overset{v_k \neq 0}{\Rightarrow} \lambda_k = 0 \forall k \, inI$$

$\Rightarrow \{v_j\}_{j \in I}$ linear unabhängig. □

Proposition 19.7 (Proposition (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung):)**.** *Sei* $(V, <,>)$. *Seien* $v_1, \dots, v_n \in V$. *Dann gibt es* $\{w_1, \dots, w_k\}, k \leqslant n, w_i \in V$ *mit* $\{w_i\}$ *orthonormal und*

$$< \{w_1, \dots, w_k\} > = < \{v_1, \dots, v_n\} >$$

(Jeder endliche Vektorraum hat eine orthonormale Basis)

Beweis. Wenn $v_1 = 0$, gehe zu v_2. Sonst $w_1 := \frac{v_1}{||v_1||}$ (wohldefiniert weil $||v_1|| \neq 0$ and $||w_1|| = 1$).
Wenn $v_2 \in < \{w_1\} >$, gehe zu v_3. Sonst $w_2 := \frac{v_2 - <v_2, w_1> w_1}{||v_2 - <v_2, w_1> w_1||}$ (wohldefiniert $||v_2 - < v_2, w_1 > w_2|| \neq 0$, $||w_2|| = 1$).
$||w_2|| = 1$ und $w_2 \perp w_1$.

$$< w_2, w_1 > = \frac{1}{||v_2 - < v_2, w_1 > w_1||} < v_2 - < v_2, w_1 > w_1, w_1 >$$

$$= \frac{1}{||v_2 - < v_2, w_1 > w_1||} (< v_2, w_1 > - < v_2, w_1 > \underbrace{< w_1, w_1 >}_{1})$$

$$= \frac{1}{||v_2 - < v_2, w_1 > w_1||} (< v_2, w_1 > - < v_2, w_1 >) = 0$$

Wenn $v_3 \in < \{w_1, w_2\} >$ gehe zu v_4. Sonst $w_3 := \frac{v_3 - <v_3, w_1> w_1 - <v_3, w_2> w_2}{||v_3 - <v_3, w_1> w_1 - <v_3, w_2> w_2||}$
$||w_3|| = 1, w_3 \perp w_2, w_3 \perp w_1$
Für $v_j \neq < \{w_1, \dots, w_m\} >, m \leqslant n$. Setze $w_{j+1} := \frac{v_n - \sum_{i=1}^m <v_j, w_i> w_i}{||v_n - \sum_{i=1}^m <v_j, w_i> w_i||}$.
Dann $||w_{j+1}|| = 1, w_{j+1} \perp \{w_1, \dots, w_m\}$ □

Korrolar 19.8. $(V, <,>)$ *und* V *hat* $\dim_k(V) < \infty$. *Dann hat* V *eine orthonormale Basis.*

Beispiel: Sei $V = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f \text{ stetig}\}$ (V Vektorraum über $\mathbb{R}$)
$< f, g > := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ (wohldefiniert).
Wir wenden Gram-Schmidt auf $\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$ mit $t \in [-1, 1]$.

1. $v_1 = 1$. $||v_1|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1 dt} = \sqrt{2}$, $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $v_2 = t$, $< v_2, w_1 > = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2}} dt = 0$,
   $w_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{t}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$ weil $\int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}$

Macht man weiter, erhält man $P := \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\frac{2}{3}}, \frac{t^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{45}}}, \dots\}$. Diese sind normiert die Legendre-Polynome (Normierung bedeutet in dem Fall die Multiplikation mit einem Faktor, sodass $P_n(1) = 1$). Diese Polynome lösen die Differenzialgleichung

$$(1 - t^2)y'' - 2ty' + (n + 1)ny = 0$$

20 Lineare Algebra 1 vom 11.12.2008

Beispiel: R^2, kanonisches $\langle , \rangle$:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$v \perp w$, denn $\langle v, w \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$
Allgemein:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, ||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

20.1 Distanz / Bessels Ungleichung

Sei $W \subset V$ ein Untervektorraum, $(V, \langle , \rangle)$ ein unitärer Vektorraum.
Sei $v \in V, w \in W$, wir definieren:

$$\operatorname{dist}(v, W) := \min(||v - w||)$$

Sei $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Orthonormalbasis für W.

$$w = \sum_i \lambda_i w_i (\lambda_i \in \mathbb{C})$$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant ||v - w||^2 &= \langle v - w, v - w \rangle = \langle v, v \rangle - \langle w, v \rangle - \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= ||v||^2 - \langle \sum_i \lambda_i w_i, v \rangle - \langle v, \sum_i \lambda_i w_i \rangle + \underbrace{\langle \sum_i \lambda_i w_i, \sum_j \lambda_j w_j \rangle}_{\sum_{i,j} \overline{\lambda_i} \lambda_j \langle w_i, w_j \rangle} \end{aligned}$$

$$\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j \\ 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases}, \text{ (Kroneckersymbol)}$$

Durch die Orthonormalität (zwei verschiedene Vektoren haben das innere Produkt 0, die Länge ist 1) gilt:

$$\begin{aligned} &= ||v||^2 - \langle \sum_i \lambda_i w_i, v \rangle - \langle v, \sum_i \lambda_i w_i \rangle + \sum_i \lambda_i \overline{\lambda_i} \\ &= ||v||^2 - \sum \overline{\lambda_i} \langle w_i, v \rangle - \sum \lambda_j \underbrace{\langle v, w_j \rangle}_{\overline{\langle w_j, v \rangle}} + \sum_i \lambda_i \overline{\lambda_i} \\ &= ||v||^2 + \sum (\lambda_i - \langle w_i, v \rangle)(\overline{\lambda_i} - \overline{\langle w_i, v \rangle}) - \sum_i |\langle w_i, v \rangle|^2 \\ &= ||v||^2 + \sum \underbrace{|\lambda_i - \langle w_i, v \rangle|^2}_{\geqslant 0} - \sum |\langle w_i, v \rangle|^2 \end{aligned}$$

ist ein Minimum genau dann, wenn $\lambda_i = \langle w_i, v\rangle$. Das Mimimum von $||v - w||$ wird angenommen für $w = \sum\langle w_i, v\rangle \cdot w_i$

$$0 \leqslant ||v||^2 - \sum|\langle w_i, v\rangle|^2$$

$$\sum|\langle w_i, v\rangle|^2 \leqslant ||v||^2 \text{ (Bessels Ungleichung)}$$

$$\operatorname{dist}(v, W) = \sqrt{(||v||^2 - \sum|\langle w_i, v\rangle|^2)}$$

Die $\langle w_i, v\rangle$ heißen Fourier-Koeffizienten von v bezüglich der Orthonormalbasis $\{w_1, \dots, w_n\}$.

20.2 Orthogonale/unitäre Endomorphismen

Sei $(V, \langle,\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, $F : V \to V$ ein Endomorphismus.

Definition 20.1. F heißt orthogonal (euklidisch) oder unitär wenn $\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle \forall v, w \in V$

Bemerkung 20.2. *F erhält Längen:*

$$||F(v)|| = \sqrt{\langle F(v), F(v)\rangle} = \sqrt{< v, v\rangle} = ||v||$$

($\Rightarrow$ längenerhaltende Abbildungen)

Bemerkung 20.3. *Ist F unitär, dann sind alle Eigenwerte von F auf dem Einheitskreis $\subset \mathbb{C}$: Angenommen $F(v) = \lambda v, v \neq 0 \Rightarrow ||v|| \neq 0$.*

$$||v|| = ||F(v)|| = ||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$$

$$||v|| \neq 0 \Rightarrow |\lambda| = 1$$

Wenn F orthogonal ist und λ ein Eigenwert, dann ist $\lambda = \pm 1$.

Bemerkung 20.4. *Für $\dim(V) < \infty$ ist ein orthogonaler/unitärer Endomorphismus F immer ein Automorphismus:*

$$F(v) = 0 \Rightarrow ||v|| = ||F(v)|| = 0 \Rightarrow v = 0$$

$\Rightarrow \ker(F) = 0$, F injektiv, also ein Isomorphismus.

20.3 Orthogonale/unitäre Matrizen

Definition 20.5.
- Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. A ist orthogonal, wenn $A^{-1} = A^t$.
- Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix. A ist unitär, wenn $A^{-1} = \overline{A^t}$.

Bemerkung 20.6. *A unitär $\Rightarrow |\det(A)| = 1$.*

Proof.

$$\begin{aligned} |\det(A)|^2 &= (\det(A))\overline{(\det(A))} = \det(A) \cdot \det(\overline{A}) \\ &= \det(A) \cdot \det(\overline{A^t}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) \\ &= \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) = 1 \end{aligned}$$

A orthogonal $\Rightarrow \det(A) = \pm 1$ □

Schreibweise:

$$U(n) := \left\{ A \middle| \begin{cases} A\ n \times n \text{ über } \mathbb{C} \\ A \text{ unitär} \end{cases} \right\}$$

$$O(n) := \left\{ A \middle| \begin{cases} A\ n \times n \text{ über } \mathbb{R} \\ A \text{ orthogonal} \end{cases} \right\}$$

$$SU(n) := \{A \in U(n) | \det(A) = +1\}$$

$$SO(n) := \{A \in O(n) | \det(A) = +1\}$$

$U(n), SU(n), O(n), SO(n)$ sind Gruppen bezüglich der Matrixmultiplikation.

z.B.: $A, B \in U(n)$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = \overline{B^t} = \overline{A^t} = (\overline{AB})^t)$$

$\Rightarrow A \cdot B \in U(n)$ (Abgeschlossenheit).

Beispiel:

$$U(1) = \{(z)_{1\times 1} | |z| = 1\}$$

$$SU(1) = 1 \text{ (triviale Gruppe)}$$

$$O(1) = \{ \underbrace{(\pm 1)}_{\text{2 Elemente}} \} = \mathbb{Z}_{/2}$$

$$SO(1) = 1$$

$$O(2) : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$$a^2 + c^2 = 1$$

$$b^2 + d^2 = 1$$

$$ab + cd = 0$$

Wenn man sich die Gleichungen auf einem Koordinatensystem vorstellt ergibt sich:

$$a = \cos(\alpha)$$

$$c = \sin(\alpha)$$

$$b = \sin(\beta)$$

$$d = \cos(\beta)$$

$$ab + cd = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \sin(\alpha + \beta) = 0$$

Wir beschränken uns also wegen der Periodizität des Sinus auf das Interval $[0, 2\pi)$:

$$\alpha + \beta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

Betrachten wir die beiden Fälle:

Fall 1:

$$\beta = -\alpha \Rightarrow \sin(\beta) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(\beta) = \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = +1$$

Fall 2:

$$\beta = \pi - \alpha \Rightarrow \sin(\beta) = \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\cos(\beta) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -1$$

Man kann also ein beliebiges Alpha wählen:

$$\forall \alpha \in [0, 2\pi)$$

und erhält damit $O(2)$.

$$SO(2) = \{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} | \alpha \in [0, 2\pi) \}$$

$$O(2) = \text{ Matrizen Fall 1 } \cup \text{ Matrizen Fall 2}$$

21 Lineare Algebra 1 vom 16.12.2008

- $A \in GL(n, \mathbb{R})$ orthogonal, wenn $A^{-1} = {}^tA$.
- $A \in GL(n; \mathbb{C})$ unitär, wenn $A^{-1} = {}^t\overline{A}$
- $F : V \to V$ unitär/orthogonal, wenn $\forall v, w \in V : \langle v, w\rangle = \langle F(v), F(w)\rangle$

21.1 Eigenschaften orthogonaler/unitärer Matrizen/Operatoren

Proposition 21.1. *A unitär $\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ $\Leftrightarrow$ Zeilenvektoren von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$*

Beweis. Die Spaltenvektoren bilden eine Basis, da die Matrix regulär ist.
Sei $A = (a^1, \dots, a^n)$
Spaltenvektoren sind eine Orthonormalbasis $\Leftrightarrow$ $\delta_{ij} = \langle a^i, a^j\rangle = {}^t\overline{a}^i a^j = (i, j)$-Eintrag von ${}^t\overline{A} \cdot A$
Da ${}^t\overline{A}A = I$ gilt, sind wir fertig. $\square$

Für die Zeilenvektoren betrachtet man $\overline{A} \cdot {}^tA$ und führt den Beweis analog durch.

Proposition 21.2. *$n = \dim(V) < \infty$, V unitär mit einer Orthonormalbasis $\mathscr{B}$, $F : V \to V$ linear. Dann gilt: F unitär $\Leftrightarrow$ $M_{\mathscr{B}}(F)$ unitär*

Proposition 21.3. *$n = \dim(V) < \infty$, V orthogonal mit einer Orthonormalbasis $\mathscr{B}$, $F : V \to V$ linear. Dann gilt: F orthogonal $\Leftrightarrow$ $M_{\mathscr{B}}(F)$ orthogonal*

Beweis. $B = \{v_1, \dots, v_n\}, v = \sum \alpha_i v_i, w = \sum \beta_i v_i$.

$$F(v) = \sum \alpha_i' v_i, F(w) = \sum \beta_i' v_i$$

Sei $\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \beta, \alpha', \beta'$ analog.
"$\Rightarrow$": Sei F unitär.

$${}^t\overline{\alpha} \cdot I_n \cdot \beta = {}^t\overline{\alpha}\beta = \langle v, w\rangle \underset{F \text{ unitär}}{=} \langle F(v), F(w)\rangle = {}^t\overline{\alpha'}\beta' = {}^t(\overline{M_{\mathscr{B}}(F)\alpha}) \cdot (M_{\mathscr{B}}(F)\beta)$$

$$= {}^t\overline{\alpha} \cdot {}^t(\overline{M_{\mathscr{B}}(F)}) M_{\mathscr{B}}(F)\beta \; \forall \alpha, \beta \in V$$

Da das für alle α, β gilt, folgt $I_n = {}^t\overline{M_{\mathscr{B}}(F)} \cdot M_{\mathscr{B}}(F) \Rightarrow$ unitär
"$\Leftarrow$":

$$\langle F(v), F(w)\rangle = {}^t\overline{\alpha'}\beta' = {}^t\overline{\alpha} \cdot \underbrace{{}^t(\overline{M_{\mathscr{B}}(F)}) \cdot M_{\mathscr{B}}(F)}_{=I,\text{ da } M_{\mathscr{B}}(F) \text{ unitär}} \cdot \beta = {}^t\overline{\alpha}\beta = \langle v, w\rangle$$

$\square$

Satz 21.4. *Sei $n = \dim(V) < \infty$, $F : V \to V$ linear, unitär. Behauptung: $\exists$ Orthonormalbasis bestehend aus Eigenvektoren von F (insbesondere sind unitäre Operatoren diagonalisierbar).*

Beweis. Induktion nach $n = \dim(V)$.
Induktionsanfang: $n = 1$ trivial klar.
Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für $n - 1$.
Induktionsschritt: Sei $n \geqslant 2$. $P_F(t)$ zerfällt über $\mathbb{C}$. $P_F(t) = \pm(t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n), \lambda_i \in \mathbb{C}$
Sei v_1 Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 der Länge $||v_1|| = 1$
Sei $W := \langle v_1 \rangle^{\perp}$.
Behauptung: $F(W) \subset W$. Sei $w_1 \in W$, also $\langle w_1, v_1 \rangle = 0$.
Zu zeigen: $\langle F(w_1), v_1 \rangle = 0$

$$\underbrace{\lambda_1}_{\neq 0} \langle F(w_1), v_1 \rangle = \langle F(w_1), \lambda_1 v_1 \rangle = \langle F(w_1), F(v_1) \rangle \underset{F \text{ unitär}}{=} \langle w_1, v_1 \rangle = 0$$

Da λ_1 Eigenwert ist, folgt $|\lambda_1| = 1 \neq 0$, damit muss $\langle F(w_1), v_1 \rangle = 0$ sein. $\Rightarrow F(w_1) \in W \Rightarrow F(W) \subset W$.
$F_{|W} : W \to W$ ist wieder unitär. Weiterhin $\dim(W) = n - 1$. Laut Induktionsvoraussetzung $\exists$ Orthonormalbasis $\{v_2, \dots, v_n\}$ von W aus Eigenvektoren von $F_{|W} \Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von F. □

Sei $A \in U(n) = \{B \in GL(n; \mathbb{C}) | B \text{ unitär}\}$.
Betrachte A als lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^n \underset{\text{unitär}}{\to} \mathbb{C}^n \Rightarrow \exists$ Orthonormalbasis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ aus Eigenvektoren von A. Setze $S := (v_1, \dots, v_n)$ (Eigenvektoren als Spalten), ($n \times n$-Matrix). Die Spaltenvektoren bilden eine Orthonormalbasis. Aus der Proposition folgt $S \in U(n)$. Es gilt: ${}^t\overline{S} \cdot A \cdot S = S^{-1} \cdot A \cdot S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Korrolar 21.5. *Sei $\dim(V) < \infty$, $F : V \to V$ unitär. Dann ist V die orthogonale Summe der Eigenräume von F,*

$$V = eig(F, \lambda_1) \oplus \dots \oplus eig(F, \lambda_2)$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von F.

Definition 21.6. Eine **orthogonale Summe** ist eine direkte Summe von paarweise orthogonalen Summanden.

Beweis. Aus dem Satz folgt direkt, dass F diagonalisierbar. Bekanntes Resultat: $V : K-$ Vektorraum, $\dim(V) < \infty, F : V \to V$ linear. Dann gilt:

$$F \text{ diagonalisierbar} \Leftrightarrow V = \operatorname{eig}(F, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{eig}(F, \lambda_k)$$

Es bleibt zu zeigen, dass Eigenräume paarweise orthogonal sind:
Sei $v \in \operatorname{eig}(F, \lambda_i), w \in \operatorname{eig}(F, \lambda_j), i \neq j$. zu zeigen: $\langle v, w \rangle = 0$

$$\langle v, w \rangle \underset{F \text{ unitär}}{=} \langle F(v), F(w) \rangle \underset{\lambda_i, \lambda_j \text{ Eigenwerte}, v, w \text{ Eigenvektoren}}{=} \langle \lambda_i v, \lambda_j w \rangle \underset{\text{Sesquilinearform}}{=} \overline{\lambda_i} \lambda_j \langle v, w \rangle$$

Annahme: $\langle v, w\rangle \neq 0 \Rightarrow \overline{\lambda_i}\lambda_j = 1$

$$\lambda_j = \underbrace{|\lambda_i|^2}_{=1} \lambda_j = \lambda_i \underbrace{\overline{\lambda_i}\lambda_j}_{=1} = \lambda_i \quad \lightning$$

$$\Rightarrow \langle v, w\rangle = 0$$

□

Satz 21.7. *Sei V ein euklidischer Vektorraum,* $\dim(V) < \infty$*,* $F : V \to V$ *orthogonal. Dann* $\exists$ *Orthonormalbasis B von V sodass*

$$M_{\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \cos(\alpha_k) & -\sin(\alpha_k) \\ 0 & & & & & & & & & \sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$$

Beweis. Induktion nach $n = \dim(V)$.
Für $n = 1$ gilt $\det(F) = \pm 1$.
Für $n \geqslant 2$ gilt:

$$P_F(t) = \pm P_1(t) \cdot \cdots \cdot P_k(t); P_i \in \mathbb{R}[t], \deg(P_i) = 1 \text{ oder } 2$$

(Vergleiche Abschnitt über Polynome)
Fall 1: Eines der P_i hat Grad 1. $((t - \lambda))$
$\Rightarrow$ F hat einen Eigenwert mit Eigenvektor $v \neq 0$.
Sei $W := \langle v\rangle \Rightarrow F(W) = W : F(v) = \lambda v \Rightarrow F(\alpha v) = (\alpha\lambda)v$ (da Eigenwert = $\pm 1 \neq 0$, da es eine orthogonale Abbildung ist).
Fall 2: Alle P_i haben Grad 2. Cayley-Hamilton $\Rightarrow 0 = P_F(F) = P_1(F) \circ \cdots \circ P_k(F)$. Wäre

$$\ker(P_i(F)) = 0 \forall i \Rightarrow P_1(F) \circ \cdots \circ P_k(F) \text{ injektiv} \quad \lightning$$

$$\Rightarrow \exists i : \ker(P_i(F)) \neq 0 \Rightarrow \exists v \neq 0 : P_i(F)(v) = 0$$

$P_i(F)$ hat die Form $t^2 + ta + b$. Setze $W := \langle\{v, F(v)\}\rangle$.
Behauptung: $F(W) \subset W$, da $0 = P_i(F)(v) = F(F(v)) + F(v)a + \mathrm{id}(v) \cdot b$.

$$\Rightarrow F(F(v)) = -aF(v) - bv \in W$$

Es gilt auch: $F(W) = W$ (da F orthogonal und $\dim(V) < \infty \Rightarrow F$ isomorphismus).
Fazit: Es existiert ein Untervektorraum W von V mit $\dim(W) = 1$ oder 2 mit $F(W) = W$. □

22 Lineare Algebra 1 vom 08.01.2009

Fortsetzung vom 16.12.2008:

Beweis. Induktion nach $n = \dim(V)$
Wir hatten gezeigt: $\exists$ Untervektorraum $W \subset V$ mit $\dim(W) = 1$ oder 2 und $F(W) = W$. $\square$

Behauptung: $F(W^\perp) = W^\perp$, zu zeigen: $v \in W^\perp \Rightarrow F(v) \in W^\perp$

$$\langle v, w\rangle = 0 \forall w \in W$$

$$\langle F(v), w\rangle \underset{F^{-1}\text{ ist orthogonal}}{=} \langle F^{-1}F(v), F^{-1}(w)\rangle = \langle v, \underbrace{F^{-1}(w)}_{\in W}\rangle = 0$$

Wir können also F einschränken:
$F|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp$ ist orthogonal

$$\dim(W^\perp) \leqslant n - 1$$

Laut Induktionsannahme: $\exists$ Orthonormalbasis $\mathscr{A}$ von V, sodass $M_{\mathscr{A}}(F|_{W^\perp})$ die gewünschte Form besitzt.

Fall 1: $\dim(W) = 1$: Sei $v \in W$ mit $||v|| = 1$. Setze $\mathscr{B} = \mathscr{A} \cup \{v\}$. Dann hat $M_{\mathscr{B}}(F)$ die gewünschte Form, da $F(V) = \pm 1 \cdot v$ (weil F orthogonal, W eindimensional, Länge muss erhalten bleiben).

Fall 2: $\dim(W) = 2$: Sei $\mathscr{A}'$ eine Orthonormalbasis von W.

$$\Rightarrow M_{\mathscr{A}'}(F|_W) \in O(2)$$

$$\Rightarrow M_{\mathscr{A}'}(F|_W) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{\det=+1(\text{Drehung})} \text{ oder } \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{\det=-1(\text{Spiegelung})}$$

Im ersten Fall setzen wir $\mathscr{B} := \mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$.
Im zweiten Fall: Charakteristisches Polynom:

$$P_{F|_W}(t) = \det(\begin{pmatrix} \cos(\alpha) - t & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) - t \end{pmatrix}$$

$$= t^2 + t\cos(\alpha) - t\cos(\alpha) - (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) = r^2 - 1 = (t+1)(t-1)$$

$$\Rightarrow \exists \text{ Orthonormalbasis } \mathscr{A}'' \text{ von } W, \text{ sodass } M_{\mathscr{A}''}(F|_W) = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (Spiegelung)}$$

$$\mathscr{B} := \mathscr{A} \cup \mathscr{A}''$$

22.1 Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition 22.1. Ein Endomorphismus $F : V \to V$ heißt selbstadjugiert, wenn

$$\langle F(v), w\rangle = \langle v, F(W)\rangle \forall v, w \in V$$

Lemma 22.2. *$v, v' \in V$. Gilt $\langle v, w\rangle = \langle v', w\rangle \forall w \in V$, dann ist $v = v'$*

Beweis.

$$\langle v - v', w\rangle = 0 \forall w \in V$$
$$w = v - v' \Rightarrow ||v - v'||^2 = 0$$
$$\Rightarrow v - v' = 0 \Rightarrow v = v'$$

□

Behauptung: Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus, sei $v \in V$.

$$\exists v^* \in V : \langle v, F(w)\rangle = \langle v^*, w\rangle \forall w \in W$$

Beweis. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Setze $v^* = \sum_i \overline{\langle v, F(v_i)\rangle} v_i$

$$w = \sum_j \beta_j \cdot v_j$$

$$\begin{aligned}
\langle v^*, w\rangle &= \sum_i \langle v, F(v_i)\rangle \cdot \langle v_i, w\rangle = \sum_i \langle v, F(v_i)\rangle \cdot \langle v_i, \sum_j \beta_j v_j\rangle \\
&= \sum_i \langle v, F(v_i)\rangle \cdot \sum_j \beta_j \underbrace{\langle v_i, v_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_i \langle v, F(v_i)\rangle \beta_i \\
&= \langle v, \sum_i \beta_i F(v_i)\rangle = \langle v, F(\underbrace{\sum_i \beta_i v_i}_{=w})\rangle \\
&= \langle v, F(w)\rangle
\end{aligned}$$

Lemma 22.3. *$\Rightarrow v^*$ ist eindeutig durch den Vektor v bestimmt.*

v^* ist also eine wohldefinierte Funktion von $v \in V$.

$$F^* : V \to V$$
$$v \mapsto v^*$$

Für F^* gilt: $\langle v, F(w)\rangle = \langle F^*(v), w\rangle \forall v, w$
F^* ist linear (also ein Endomorphismus):

$$\begin{aligned}
&\langle F^*(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), w\rangle \\
&= \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, F(w)\rangle = \overline{\lambda_1}\langle v_1, F(w)\rangle + \overline{\lambda_2}\langle v_2, F(w)\rangle \\
&= \overline{\lambda_1}\langle F^*(v), w\rangle + \overline{\lambda_2}\langle F^*(v_2), w\rangle \\
&= \langle \lambda_1, F^*(v_1) + \lambda_2 F^*(v_2), w\rangle \forall w \in W
\end{aligned}$$

Lemma 22.4. $\Rightarrow F^*(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 F^*(v_1) + \lambda_2 F^*(v_2)$

□

Definition 22.5. F^* ist der zu F adjungierte Endomorphismus bzgl $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Also gilt: F ist selbstadjungiert $\Leftrightarrow F^* = F$

Definition 22.6. $F : V \overset{\text{lin.}}{\to} V$ heißt **normal**, wenn $FF^* = F^*F$

Beispiel: 1) unitär $\Rightarrow$ normal:

$$F^* = F^{-1} \Rightarrow FF^* = FF^{-1} = \mathrm{id}_v = F^{-1}F = F^*F$$

2) selbstadjungiert $\Rightarrow$ normal:

$$F = F^* \Rightarrow FF^* = F^2 = F^*F$$

Rechenregeln:

$$(F+G)^* = F^* + G^*$$
$$(\lambda F)^* = \overline{\lambda} \cdot F^*$$
$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$$
$$(F^*)^* = F$$

Matrixdarstellung von F^* Sei $\mathscr{B} := \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis für V. Sei $(a_{ij}) = M_{\mathscr{B}}(F)$, d.h. $F(v_j) = \sum_i a_{ij} v_i$. Wir wollen $M_{\mathscr{B}}(F^*) = (a^*_{ij})$ bestimmen:

$$\langle v_k, F(v_j) \rangle = \langle v_k, \sum_i a_{ij} v_i \rangle = \sum_i a_{ij} \underbrace{\langle v_k, v_i \rangle}_{\delta_{ki}} = a_{kj}$$

$$\langle v_k, F(v_j) \rangle = \langle F^*(v_k), v_j \rangle = \langle \sum_i a^*_{ik} v_i, v_j \rangle = \sum_i \overline{a^*_{ik}} \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \overline{a^*_{jk}}$$

$$a^*_{jk} = \overline{a_{kj}}$$

$$M_{\mathscr{B}}(F^*) = {}^t\overline{M_{\mathscr{B}}(F)}$$

Es folgt:

$$\mathbb{R} : F \text{ selbstadjungiert } \Rightarrow M_{\mathscr{B}}(F) \text{ symmetrisch}$$
$$\mathbb{C} : F \text{ selbstadjungiert } \Rightarrow M_{\mathscr{B}}(F) \text{ hermitesch}({}^t\overline{A} = A)$$

Lemma 22.7. *$F : V \to V$ Endomorphismus, F normal*

1. $\ker(F) = \ker(F^*)$
2. $\mathrm{eig}(F, \lambda) = \mathrm{eig}(F^*, \overline{\lambda})$

Beweis. 1:

$$||F(v)||^2 = \langle F(v), F(v)\rangle = \langle F^*F(v), v\rangle = \langle FF^*(v), v\rangle = \langle F^{**}F^*(v), v\rangle = \langle F^*(v), F^*(v)\rangle = ||F^*(v)||^2$$

$$\Rightarrow F(v) = 0 \Leftrightarrow F^*(v) = 0$$

2:

$$G := F - \lambda \mathrm{id}_v$$
$$\Rightarrow G^* = F^* - \overline{\lambda}\mathrm{id}_v$$
$$\Rightarrow G \text{ normal}$$
$$\mathrm{eig}(F, \lambda) = \ker(G) \underset{1.}{=} \ker(G^*) = \mathrm{eig}(F^*, \overline{\lambda})$$

□

23 Lineare Algebra 1 vom 13.01.2009

$$F : V \Rightarrow V \text{ linear }, \dim(V) = n < \infty$$
$$\langle F^*(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle$$
$$F \text{ selbstadjungiert } \Leftrightarrow F = F^* \Leftrightarrow \langle F(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle$$
$$\Rightarrow F \text{ normal } \Leftrightarrow FF^* = F^*F$$
$$F \text{ normal } \Rightarrow \underbrace{\text{eig}(F, \lambda)}_{=\ker(F-\lambda\cdot\text{id})} = \underbrace{\text{eig}(F^*, \overline{\lambda})}_{=\ker(F^*-\overline{\lambda}\cdot id)}$$

Korrolar 23.1. *F selbstadjungiert $\Rightarrow$ alle Eigenwerte von F sind reell.*

Beweis. Sei λ ein Eigenwert von F mit Eigenvektor $v, v \neq 0$

$$\lambda v = F(v) = F^*(v) = \overline{\lambda} v$$
$$v \neq 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

□

23.1 Spektralsatz (Version 1)

(Spektrum(F) := { Eigenwerte von F })

$$F : V \overset{\text{lin.}}{\Rightarrow} V, \dim(V) < \infty$$

1)

$$F \begin{cases} \text{symmetrisch (selbstadjungiert, } \mathbb{R}) \\ \text{normal}(\mathbb{C}) \end{cases} \Rightarrow \exists \text{ eine ONB für V bestehend aus Eigenvektoren zu } F$$

2)

$\exists$ eine Orthonormalbasis für V bestehend aus Eigenvektoren zu $F \Rightarrow$ normal

Beweis (1). $\mathbb{C}$: charakteristisches Polynom $P_F(t)$ zerfällt in Linearfaktoren

$$\Rightarrow \exists \text{ Eigenwert } \lambda \text{ mit Eigenvektor } v, F(v) = \lambda v, ||v|| = 1$$

$\mathbb{R}$: Wir betrachten $P_F(t)$ als komplexes Polynom. Als solches zerfällt es in Linearfaktoren. Die Nullstellen sind wegen des Korollars reell.

$$\Rightarrow \exists \text{ Eigenwert } \in \mathbb{R}\lambda \text{ mit Eigenvektor } v, ||v|| = 1$$
$$W := \langle v \rangle^{\perp}$$

Induktion nach $n = \dim(V), n = 1$

$$\dim(W) = n - 1$$

Behauptung:

$$F(W) \subset W$$

$$w \in W \langle v, w \rangle = 0 \overset{zuzeigen}{\Rightarrow} \langle v, F(w) \rangle = 0$$

$$\langle v, F(w) \rangle = \langle F^*(v), w \rangle$$

$$\begin{cases} \overset{\mathbb{R}}{=} \langle F(v), w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \underbrace{\langle v, w \rangle}_{=0} = 0 \\ \overset{\mathbb{C}}{=} \langle \overline{\lambda} v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Wir können F einschränken: $F_| : W \Rightarrow W$ Endomorphismus, ist wieder selbstadjungiert oder normal.
Induktionsannahme $\Rightarrow \exists$ Orthonormalbasis $\{v_2, \ldots, v_n\}$ von W bestehend aus Eigenvektoren von $F_|$
$\Rightarrow \{v, \underbrace{v_2, \ldots, v_n}_{=W}\}$ eine Orthonormalbasis von V aus EV von F. □

Beweis (2). Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von F.

$$F(v_i) = \lambda_i v_i, i = 1, \ldots, n$$

$$F^*F(v_i) = F^*(\lambda_i v_i) = \lambda_i F^*(v_i) = \lambda_i \overline{\lambda_i} v_i$$

$$FF^*(w_i) = F(\overline{\lambda_i} v_i) = \overline{\lambda_i} F(v_i) = \overline{\lambda_i} \lambda_i v_i$$

$$FF^* = F^*F$$

Basis $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ aus Eigenvektoren von F

$$M_{\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathscr{B}}(F^*) = {}^t\overline{M_{\mathscr{B}}(F)} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

□

Korrolar 23.2. *F selbstadjungiert ($\mathbb{R}$) oder normal ($\mathbb{C}$) $\Rightarrow$ F diagonalisierbar*

23.2 Spektralsatz (Version 2)

F selbstadjungiert ($\mathbb{R}$) oder normal ($\mathbb{C}$).
Dann $\exists$ orthogonale Projektionen $E_i : V \Rightarrow V$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $F = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sind die paarweise verschiedenen Eigenwerte von F ("Spektralzerlegung" von F)

2. $\mathrm{id} = E_1 + E_2 + \cdots + E_k$

3. $E_i E_j = 0, i \neq j$

Bemerkung 23.3.
- *E_i Projektion $\Rightarrow E_i^2 = E_i$*
- *Abstrakt: Eine Projektion E heißt orthogonal, wenn $E(v) \perp (I - E)(V)$*

Achtung: Eine orthogonale Projektion ist **keine** orthogonale Abbildung!

Beweis von Version 2. F diagonalisierbar

$$\Rightarrow V = \oplus_{i=1}^{k} \mathrm{eig}(F, \lambda_i), v \in V \Rightarrow \exists! \text{ Zerlegung}$$

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k, v_i \in \mathrm{eig}(F, \lambda_i)$$

Definiere $E_i : V \Rightarrow V$ mit $E_i(v) := v_i$.
Bild $E_i(V) = \mathrm{eig}(F, \lambda_i)$

1. $F(v) = F(v_1 + \cdots + v_k) = F(v_1) + \cdots + F(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = \lambda_1 E_1(v) + \cdots + \lambda_k E_k(v) = (\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_k E_k)(v)$

2. $Id(v) = v = v_1 + \cdots + v_k = E_1(v) + \cdots + E_k(v) = (E_1 + \cdots + E_k)(v)$

3. $\underbrace{E_i E_j}_{i \neq j}(v) = E_i(0 + \cdots + \underbrace{0}_{\text{i-te Stelle}} + \cdots + 0 + v_j + 0 + \cdots + 0) = 0$

Die E_i sind orthogonal zueinander:

$$v_i \in \mathrm{eig}(F, \lambda_i), v_j \in \mathrm{eig}(F, \lambda_j), i \neq j$$

$$\lambda_i \langle v_i, v_j \rangle = \langle \overline{\lambda_i}, v_j \rangle = \langle F^*(v_i), v_j \rangle$$
$$= \langle v_i, F(v) \rangle = \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle$$
$$\underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)}_{\neq 0} \langle v_i, v_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0$$

$\square$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} : \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ kanonisches inneres Produkt}} \Rightarrow \mathbb{R}^3$$

(symmetrisch, also selbstadjungiert) $\Rightarrow$ Eigenwerte reell

$$P_A(t) = (t-2)^2(t-4)$$

$$\mathrm{EW}(A) = \{2, 4\}$$

$$\mathrm{eig}(A,2) = \ker(A - 2I) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\}$$

hat Basis

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

$$\mathrm{eig}(A,4) = \left\{ x | \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\}$$

hat Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(Gram-Schmidt)-Orthogonalisierung:
Orthonormalbasis

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

aus Eigenvektoren von A

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in O(3)$$

(orthogonale Matrix)

Es gilt: ${}^tSAS = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

24 Lineare Algebra 1 vom 15.01.2009

Beispiel (Fortsetzung):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

symmetrisch

$$EW(A) = \{2, 4\}$$

Wir bestimmen die Spektralzerlegung von A:

$$A = 2E_1 + 4E_2$$

Wir wissen:

$$E_1 + E_2 = I \Rightarrow E_2 = I - E_1$$

Einsetzen in die erste Gleichung:

$$A = 2E_1 + 4(I - E_1) = 4I - 2E_1 \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2}(4I - A)$$

$$E_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4-3 & 0 & 1 \\ 0 & 4-2 & 0 \\ 1 & 0 & 4-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$E_1^2 = E_1$$

$$E_2 = I - E_1 = \dots$$

Wenn man A^2 bestimmen will:

$$A^2 = (2E_1 + 4E_2)(2E_1 + 4E_2)$$

$$= 4E_1 + 16E_2$$

24.1 Hauptachsentransformation

(= Diagonalisierung von Formen)

V Vektorraum über $\begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$, $s : V \times V \to \begin{cases} \mathbb{R}(\text{ symmetr. Bilinearform }) \\ \mathbb{C}(\text{ Hermitesche Form}) \end{cases}$

Sei $\mathscr{A}$ eine Basis von V

$$\Rightarrow A := M_{\mathscr{A}}(s) = (a_{ij})$$

$$a_{ij} = s(v_i, v_[), \mathscr{A} = \{v_1, \dots, v_n\}, n = \dim(V)$$

Spektralsatz $\Rightarrow$ Es existiert eine Orthonormalbasis sodass, wenn S die Spaltenvektoen der Orthonormalbasis enthält, gilt:

$$^t\overline{S}AS = S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

(Bei orthogonalen und unitären Matrizen ist ${}^t\overline{S}AS = S^{-1}AS$)

Da $S \in \begin{cases} O(n) \\ U(n) \end{cases}$

Wenn $\mathscr{B}$ eine Basis mit $M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_v) = S$ ist, dann gilt $M_{\mathscr{B}}(s) = {}^t\overline{S}M_{\mathscr{A}}(s)S = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
Wir haben gezeigt: Es existiert eine Basis $\mathscr{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ von V sodass

$$s(w_i, w_j) = \lambda_i \delta_{ij} \ \forall i, j$$

(Diese ganze Rechnung ist die Hauptachsentransformation, die $\langle w_i \rangle$ heißen Hauptachsen von s)

Konkret: $V = \mathbb{R}^n$, A sei eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix mit Rang m, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$.

Definition 24.1. Eine **Quadrik** auf V ist eine Funktion $Q(x) = {}^t xAx + 2^t bx + c = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_i b_ix_i + c$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

- Substitution: $x = Sy$, wobei S eine orthogonale Matrix ist mit ${}^tSAS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0, \ldots, 0)$ (diese Dreh-Matrix ergibt sich aus dem Spektralsatz)

$$Q = {}^t(Sy)A(Sy) + 2^t bSy + c = {}^t y \underbrace{({}^tSAS)}_{\text{diag}} y + 2^t \underbrace{({}^tSb)}_{=:\tilde{b}} y + c$$

$$= \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i^2 + 2\sum_{i=1}^n \tilde{b}_i y_i + c$$

- 2. Substitution; $z_i = \begin{cases} y_i + \frac{\tilde{b}_i}{\lambda_i} \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant m \\ y_i \text{ für } m < i \leqslant n \end{cases}$

$$Q = \sum_{i=1}^m \lambda_i (z_i - \frac{\tilde{b}_i}{\lambda_i})^2 + 2\sum_{i=1}^m \tilde{b}_i(z_i - \frac{\tilde{b}_i}{\lambda_i}) + 2\sum_{i=m+1}^n \tilde{b}_i z_i + c$$

$$= \sum_{i=1}^m \lambda_i (z_i^2 - 2\frac{\tilde{b}_i}{\lambda_i}z_i + \frac{\tilde{b}_i^2}{\lambda_i^2}) + 2\sum_{i=1}^m \tilde{b}_i z_i - 2\sum_{i=1}^m \frac{\tilde{b}_i^2}{\lambda_i} + 2\sum_{i=m+1}^n \tilde{b}_i z_i + c$$

$$= \sum_{i=1}^m \lambda_i z_i^2 - 2\sum_{i=1}^m \tilde{b}_i z_i + \sum_{i=1}^m \frac{\tilde{b}_i^2}{\lambda_i} + 2\sum_{i=1}^m \tilde{b}_i z_i - 2\sum_{i=1}^m \frac{\tilde{b}_i^2}{\lambda_i} + 2\sum_{i=m+1}^n \tilde{b}_i z_i + c$$

$$= \sum_{i=1}^m \lambda_i z_i^2 + 2\sum_{i=m+1}^n \tilde{b}_i z_i + \tilde{c}$$

Beispiel: $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$Q(x)(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c$$

Wir haben gezeigt durch Drehung und Verschiebung hat $Q(x_1, x_2)$ folgende Form:

Fall $m = 2$:

$$Q = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + c$$

(kanonische Form für Quadrik in der Ebene, wir erhalten eine Ellipse/Hyperbel)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Fall $m = 1$:

$$Q = \lambda_1 z_1^2 + 2\tilde{b_2} z_2 + \tilde{c}$$

$\Rightarrow$ Parabel

24.2 Die Signatur

Definition 24.2. Sei A eine symmetrische, reelle $n \times n$-Matrix:

$$s(x, y) := {}^t xAy$$

$$x, y \in \mathbb{R}^n = V$$

$$\Rightarrow s : V \times V \to \mathbb{R}$$

symmetrische Bilinearform
Die **Signatur** $\sigma(s)$ von s ist

$$\sigma(s) := \underbrace{(\text{ Anzahl der positiven Eigenwerte mit Vielfachheit von } A)}_{=a_+} -$$

$$\underbrace{(\text{ Anzahl der negativen Eigenwerte mit Vielfachheit von } A)}_{=a_-}$$

$$\mathrm{Rg}(s) = \mathrm{Rg}(A) = a_+ + a_-$$

Beispiel: dim = 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$s(x,y) = {}^t xy$ (kanonisches inneres Produkt auf der Ebene $\mathbb{R}^2$)
$\sigma(s) = 2$ (zwei positive Eigenwerte, keine negativen Eigenwerte)
z.B. $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$${}^t SAS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte, σ von ${}^t SAS$?

$$\det(\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix} = (1-t)(2-t) - 1 = 2 - 3t + t^2 - 1 = t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-4}{4}} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (Eigenwert von } {}^t SAS)$$

$\Rightarrow$ Die Eigenwerte **ändern sich**.
Aber: $\sqrt{5} < 3 \Rightarrow$ Die beiden Eigenwerte sind immernoch positiv.

$$s'(x,y) = {}^t x({}^t SAS)y \Rightarrow \sigma(s') = 2 = \sigma(s)$$

Satz 24.3 (Trägheitssatz von Sylvester:)**.**

$$n : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$n = \dim(V)$$

symmetrische Bilinearform, $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ Basen von V
Dann haben $M_{\mathscr{A}_1}(s)$ und $M_{\mathscr{A}_2}(s)$ die gleiche Anzahl von positiven Eigenwerten, die gleiche Anzahl von negativen Eigenwerten und die gleiche Signatur und den gleichen Rang.

Beweis. Hauptachsentransformation $\Rightarrow$ es existieren Basen $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$, sodass:
$M_{\mathscr{B}_1}(s) = \text{diag}$ und $M_{\mathscr{B}_1}(s)$ hat die gleichen Eigenwerte wie $M_{\mathscr{A}_1}(s)$
$M_{\mathscr{B}_2}(s) = \text{diag}$ und $M_{\mathscr{B}_2}(s)$ hat die gleichen Eigenwerte wie $M_{\mathscr{A}_2}(s)$
$\mathscr{B}_1 = \{v_1^+, \dots, v_p^+, w_1, \dots, w_{n-p}\}$, sodass gilt

$$s(v_i^+, v_i^+) > 0, s(w_i, w_j) \leqslant 0 \text{ und sonst } = 0$$

$\mathscr{B}_2 = \{u_1^+, \dots, u_p^+, w'_1, \dots, w'_{n-p'}\}$, sodass gilt

$$s(u_i^+, u_i^+) > 0, s(w'_i, w'_j) \leqslant 0 \text{ und sonst } = 0$$

Setze $V^+ = \langle v_1^+, \dots, v_p^+ \rangle, \dim(V^+) = p, W_{\leqslant 0} = \langle w'_1, \dots, w'_{n-p'} \rangle, \dim(W_{\leqslant 0}) = n - p'$.
Behauptung:

$$V^+ \cap W_{\leqslant 0} = \{0\}$$

Angenommen es existiert ein $v \in V^+ \cap W_{\leqslant 0}, v \neq 0$. $v = \sum \lambda_i v_i^+ = \sum \mu_j w_j'$ (λ_i nicht alle 0).

$$s(v,v) = s(\sum \lambda_i v_i^+, \sum \lambda_j v_j^+) = \sum_{i,j} \overline{\lambda_i} \lambda_j s(v_i^+, v_j^+) = \sum_i \underbrace{|\lambda_i|^2}_{\geqslant 0} \underbrace{s(v_i^+, v_j^+)}_{>0} > 0$$

$$s(v,v) = \sum_{i,j} \overline{\mu_i} \mu_j s(w_i', w_j') = \sum_i \underbrace{|\mu_i|^2}_{\geqslant 0} \underbrace{s(w_i', w_i')}_{\leqslant 0} \leqslant 0$$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Behauptung

$$\dim(V^+ \oplus W_{\leqslant 0}) = \dim(V^+) + \dim(W_{\leqslant 0}) = p + (n - p') \leqslant \dim(V) = n$$

$$p' \leqslant p$$

Setze $U^+ = \langle u_1^+, \ldots, u_{p'} \rangle, \dim(U^+) = p'$, $W'_{\leqslant 0} = \langle w_1, \ldots, W_{n-p} \rangle$
Analog wie vorhin erhält man $p \geqslant p'$ $\square$

25 Lineare Algebra 1 vom 20.01.2009

25.1 Funktionalkalkül für normale Endomorphismen

Vektorraum V über $\mathbb{C}$, $\dim(V) < \infty, A : V \to V$ normal.
Gegeben sie Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ von der wir annehmen, dass sie überall in $\mathbb{C}$ konvergiert.
$(a_n \in \mathbb{C})$ (f ist "analytisch" oder "holomorph")

Beispiel:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$\cos(x) + i\sin(x) = e^{ix} = \sum \frac{1}{n!}(ix)^n = \sum \frac{1}{n!} i^n x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^2 k + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\Rightarrow \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\Rightarrow \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Wir wollen $f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$ berechnen.
Spektralsatz $\Rightarrow$ es existiert eine Spektralzerlegung

$$A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k$$

(λ paarweise verschiedene Eigenwerte, E orthogonale Projektionen)

$$E_i^2 = E_i, E_i E_j = 0 (i \neq j)$$

$$I = E_1 + \cdots + E_k$$

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_k E_k)^n$$

$$n = 2 : (\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_k E_k)^2 = \sum_i \lambda_i^2 \underbrace{E_i^2}_{=E_i} + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j \underbrace{E_i E_j}_{=0} = \sum_i \lambda_i^2 E_i$$

Induktion:

$$(\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_k E_k)^n = \lambda_1^n E_1 + \lambda_2^n E_2 + \cdots + \lambda_k^n E_k$$

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1^n E_1 + \cdots + \lambda_k^n E_k) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_1^n) E_1 + \cdots + (\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_k^n) E_k$$
$$= f(\lambda_1)E_1 + \cdots + f(\lambda_k)E_k$$
$$f(A) = f(\lambda_1)E_1 + \cdots + f(\lambda_k)E_k$$

25.1.1 Anwendung: Leonorda da Pisa (genannt "Fibonacci")

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \Rightarrow 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots (Fibonacci - Zahlen)$$

Aufgabe: Finde eine **geschlossene** Form für die Fibonacci-Zahlen!

$$U_k = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}$$
$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$U_{k+1} = \begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{:=A,\text{ symmetrisch}} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = A \cdot u_k$$
$$u_k = U^k \cdot u_0$$
$$F_k = (u_k)_2 = (A^k \cdot u_0)_2$$

Wir müssen A^k bestimmen.

$$f(z) = z^k,\ A^k = f(A)$$
$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$
$$\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$A = \lambda_+ E_+ + \lambda_- E_-$$
$$I = E_+ + E_-$$
$$A - \lambda_- I = (\lambda_+ - \lambda_-)E_+$$
$$\Rightarrow E_+ = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}(A - \lambda_- I)$$
$$\Rightarrow E_- = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+}(A - \lambda_+ I)$$
$$A^k = f(A) = f(\lambda_+)E_+ + f(\lambda_-)E_- = \lambda_+^k E_+ + \lambda_-^k E_-$$

$$= \frac{\lambda_+^k}{\lambda_+ - \lambda_-}(A - \lambda_- I) + \frac{\lambda_-^k}{\lambda_- - \lambda_+}(A - \lambda_+ I)$$

$$(A - \lambda_- I)u_0 = \begin{pmatrix} 1-\lambda_- & 1 \\ 1 & -\lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(A^k u_0)_2}_{=F_k} = \underbrace{\frac{\lambda_+^k - \lambda_-^k}{\lambda_+ - \lambda_-}}_{=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k)}$$

(Formel von Binet)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F_{k+1}}{F_k} = \frac{\lambda_+^{k+1} \cdot (1- < 1)}{\lambda_+^k (1- < 1)^k} = \lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

"goldener Schnitt"

Definition 25.1. Wir nehmen zwei Abschnitte a, b. Der goldene Schnitt definiert sich durch $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{F_{k+2}}{F_{k+1}} = \frac{F_{k+1} + F_k}{F_{k+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{F_{k+1}}{F_k}} = 1 + \frac{1}{\frac{F_k + F_{k-1}}{F_k}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{F_k}{F_{k-1}}}} \cdots = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Weitere Anwendung des Spektralsatzes:

25.2 Der Rayleighquotient

Sei $A : V \to V$ selbstadjungiert. $\Rightarrow$ Alle Eigenwerte reell.
Wir wollen eine Alternative zum charakteristischen Polynom besprechen um den kleinsten Eigenwert von A bestimmen zu können.

Definition 25.2.

$$\frac{\langle v, Av \rangle}{\langle v, v \rangle} = R_A(v)$$

heißt Rayleigh-Quotient ($v \in V, v \neq 0$)

Spektralsatz $\Rightarrow$ es existiert eine Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ für V mit $Av_i = \lambda_i v_i$ (λ_i die Eigenwerte von A)

$$v = \sum \alpha_i v_i$$

$$R_A(v) = \frac{\langle v, Av \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\langle \sum \alpha_i v_i, A \sum \alpha_j v_j \rangle}{\langle \sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_j v_j \rangle} \underbrace{=}_{\text{Orthonormal.}} \frac{\sum |\alpha_i|^2 \lambda_i}{\sum |\alpha_i|^2}$$

(ein gewichtetes Mittel, Gewichte sind die Eigenwerte)
Sei $\lambda_{\min}$ der kleinste Eigenwert

$$\lambda_{\min} \sum |\alpha_i|^2 = \sum |\alpha_i|^2 \lambda_{\min} \leqslant \sum \underbrace{|\alpha_i|^2}_{\geqslant 0} \lambda_i$$

$$\lambda_{\min} \leqslant \frac{\sum |\alpha_i|^2 \lambda_i}{\sum |\alpha_i|^2} = R_A(v)$$

Andererseits: Angenommen $\lambda_{\min} = \lambda_{i_0}$
Setze $\alpha_i := \begin{cases} 1, i = i_0 \\ 0, i \neq i_0 \end{cases}$. Dies definiert ein v mit $\lambda_{\min} = R_A(v) \Rightarrow \lambda_{\min} = \min_{v \neq 0, v \in V} R_A(v)$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{(symmetrisch)}$$

$$(x\ y) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2(x^2 - xy + y^2)$$

$$R_A(x, y) = \frac{2(x^2 - xy + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$\lambda_{\min} = \min_{(x,y) \neq (0,0)} \frac{2(x^2 - xy + y^2)}{x^2 + y^2}$$

(Ab hier brauchen wir Stoff aus Ana2 (mehrere Veränderliche))
Gradient

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow y = x(R_A(x, x) \equiv 1 \Rightarrow \lambda_{\min} = 1) \text{ oder } y = -x(R_a(x, -x) \equiv 3 \Rightarrow \lambda_{\min} = 3)$$

einfacher in diesem Fall:

$$P_A(t) = t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1, 3$$

26 Lineare Algebra 1 vom 22.01.2009

26.1 Mehr zur Signatur

"Trick" zur Berechnung der Signatur einer symmetrischen nicht-singulären, reellen $n \times n$-Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 2 & 2 & 3 & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots \end{pmatrix}$$

Wir betrachten zuerst A_1 mit $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, dann A_2 mit $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ etc.

Annahme: Alle A_k sind nichtsingulär.

Satz 26.1.

$$\sigma(A) = sgn(A), +\#(\textit{Vorzeichen } \det(A_k) \Rightarrow \det(A_{k+1}) \textit{ ändert sich nicht}) - \#(\textit{Vorzeichen ändert sich})$$

Beweis. Induktion nach n.
Induktionsanfang $n = 1$:

$$A = A_1, \sigma(A_1) = \operatorname{sgn}(A_1)$$

Induktionsannahme: Die Formel ist korrekt für alle $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen
Induktionsschritt: $n \geqslant 2$

$$\exists T \in O(n-1)$$

$$^tT \cdot A_{n-1} \cdot T = \begin{pmatrix} P_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & P_k & & & \\ & & & n_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & n_l \end{pmatrix} (p_i > 0, n_j < 0)$$

Setze $T' := \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, eine $n \times n$-Matrix

$$T' \in O(n)$$

$$^tT' \cdot A \cdot T' = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_l \end{pmatrix} & \begin{matrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{matrix} \\ \beta_1 \dots \beta_{n-1} & \beta_n \end{pmatrix} =: B$$

$$\text{Setze } S := \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} -\beta_1/p_1 \\ \vdots \\ -\beta_k/p_k \\ -\beta_{k+1}/n_1 \\ \vdots \\ -\beta_{n-1}/n_l \end{matrix} \\ 0 \ldots 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tS\,BS = \begin{pmatrix} P_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & n_l & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(S) = 1$$

Da ${}^tT' = (T')^{-1}$ gilt:

$$\det(A) = \det(B) = \det(\operatorname{diag}(p_1, \ldots, n_l, \lambda)) = p_1 \cdot \cdots \cdot n_l \cdot \lambda$$

$$\det(A_{n-1}) = \det(\operatorname{diag}(p_1, \ldots, n_l)) = p_1 \cdot \cdots \cdot n_l$$

$\lambda \neq 0$ da sonst $\det(A) = 0$ wäre.

Fall $\lambda > 0$: Bei $\det(A_{n-1}) \Rightarrow \underbrace{\det(A)}_{=A_n}$ kein Vorzeichenwechsel, da $\lambda > 0$.
Zu zeigen: $\sigma(A) = \sigma(A_{n-1}) + 1$

$$\sigma(A) \underset{\text{Trägheitssatz}}{=} \sigma(B) \underset{\text{Trägheitssatz}}{=} \sigma \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} = (k+1) - l = \sigma(A_{n-1}) + 1$$

Fall $\lambda < 0$: Bei $\det(A_{n-1}) \Rightarrow \det(A_n)$ ändert sich das Vorzeichen.
Zu zeigen: $\sigma(A) = \sigma(A_{n-1}) - 1$

$$\sigma(A) = \sigma(B) = \sigma \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} = k - (l+1) = \sigma(A_{n-1}) - 1$$

□

Beispiel:

$$\sigma \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = ?$$

$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$$

$$\det(A_3) = 2\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 1\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

$$\Rightarrow \sigma(A) = +1 + 2 = +3$$

Wann ist $\sigma = 0$?

Definition 26.2. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle, V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, nichtsinguläre Bilinearform. Ein Untervektorraum $L \subset V$ heißt isotrop, wenn:

1. $\langle l_1, l_2 \rangle = 0 \; \forall l_1, l_2 \in L$
2. $\dim(L) \geqslant \frac{1}{2} \dim(V)$

Beispiel:

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle := (x_1 \; x_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$L := \mathbb{R} \cdot (1, 0) \subset \mathbb{R}^2 = V$ ist isotrop, denn:

$$\langle (a, 0), (b, 0) \rangle = a \cdot 0 + 0 \cdot b = 0 \; \forall a, b$$

Lemma 26.3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *nicht singulär* $\Rightarrow \det(M_{\mathscr{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) \neq 0$

Lemma 26.4. *Sei* $k + l > n$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix} = 0$$

Die Matrix hat links oben einen Block von Nullen mit k Zeilen und l Spalten.

Beweis. Induktion nach n.
Induktionsanfang $n = 1$: $k + l > 1 \Rightarrow k = l = 1 \Rightarrow$ Matrix $= \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 0$
Induktionsschritt $n \geqslant 2$:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} & * \end{pmatrix}$$

Laplace-Entwicklung nach der 1. Spalte:

$$= a_{k+1}(-1)^{k+2} \det(A_{k+1}) + \cdots + a_n(-1)^{n+1} \det(A_n)$$

$A_i = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix}$ ist eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, der Nullblock links oben hat nur noch $l - 1$ Spalten, aber immernoch k Zeilen.

$$k + (l - 1) > n - 1 \Rightarrow \det(A_i) = 0 \; \forall i$$

$\square$

Definition 26.5. $L \subset V$ isotrop.

$$L^\perp := \{v \in V | \langle v, l \rangle = 0 \; \forall l \in L\}$$

$$\Rightarrow L \subset L^\perp$$

Proposition 26.6.

$$L = L^{\perp}$$

Beweis. $n = \dim(V)$, $k = \dim(L)$
Wähle Basen:
$\{l_1, \dots, l_k\}$ von L.
$\{l_1, \dots, l_k, v_{k+1}, \dots, v_l\}$ von $L^{\perp}$
$\mathscr{B} = \{l_1, \dots, l_k, v_{k+1}, \dots, v_l, w_1, \dots, w_n\}$ von V.

$$M_{\mathscr{B}}(\langle\cdot,\cdot\rangle) = \begin{pmatrix} \underbrace{\langle l_1, l_1\rangle}_{=0} & \dots & \underbrace{\langle l_1, l_k\rangle}_{=0} & \underbrace{\langle l_1, v_{k+1}\rangle}_{=0} & \dots & \underbrace{\langle l_1, v_l\rangle}_{=0} & \langle l, w\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \underbrace{\langle l_k, l_1\rangle}_{=0} & \dots & \underbrace{\langle l_k, l_k\rangle}_{=0} & \underbrace{\langle l_k, v_{k+1}\rangle}_{=0} & \dots & \underbrace{\langle l_k, v_l\rangle}_{=0} & \langle l_k, w\rangle \\ * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

($M_{\mathscr{B}}$ ist eine $k \times l$-Matrix.)
Angenommen $l > k$:

$$k + l > 2k \geqslant 2 \cdot \frac{n}{2} = n$$

$$k + l > n$$

Lemma 26.4 $\Rightarrow \det(M_{\mathscr{B}}(\langle\cdot,\cdot\rangle)) = 0$
Lemma 26.3 $\Rightarrow \langle\cdot,\cdot\rangle$ ist singulär, Widerspruch □

Außerdem: Angenommen $\dim(L) > \frac{n}{2}$

$$M_{\mathscr{B}}(\langle\cdot,\cdot\rangle) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$k + l = 2k > n$$

Lemma 26.4 $\Rightarrow \det(M) = 0 \Rightarrow \langle\cdot,\cdot\rangle$ singulär, Widerspruch

$$\Rightarrow \dim(L) = \frac{1}{2}\dim(V), \dim(V) \text{ gerade}$$

Lemma 26.7. *Sei $L \subset V$ isotrop, sei $\{l_1, \dots, l_k\}$ eine Basis von L. Dann existiert $\{l_1^*, \dots, l_k^*\}$ mit*

1. $\{l_1, \dots, l_k, l_1^*, \dots, l_k^*\}$ *Basis von V*
2. $\langle l_i^*, l_j\rangle = \delta_{ij}$

Bemerkung 26.8.

$$V = L \oplus \underbrace{E}_{\{e_1,\dots,e_k\}}$$

$L = L^\perp \Rightarrow (\langle l_i, e_j \rangle)_{i,j}$ ist nichtsingulär
Sei $(\alpha_{ij})_{i,j}$ die zu $(\langle l_i, e_j \rangle)_{i,j}$ inverse Matrix.

$$l_i^* := \sum_j \alpha_{ij} e_j$$

Satz 26.9.

$$\exists \text{ isotroper Untervektorraum } \Leftrightarrow \sigma(\langle \cdot, \cdot \rangle) = 0$$

Beweis. "$\Rightarrow$") Lemma 26.7 $\Rightarrow \exists \mathscr{B}$ sodass $M_{\mathscr{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ I_k & * \end{pmatrix}$ mit einem $k \times k$-Nullblock
Ersetze die i_j^* durch l_j^*-(Linearkombination der l_i)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{diag}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma = 0$$

"$\Leftarrow$")

$$M_{\mathscr{B}} = \mathrm{diag}(\underbrace{p_1, \dots, p_k}_{k}, \underbrace{n_1, \dots, n_k}_{k})$$

$$P_i > 0, n_j < 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{P_i}} \cdot p_i$$

$$\frac{1}{\sqrt{|n_j|}} \cdot v_j$$

$$\Rightarrow \mathrm{diag}(+1, \dots, +1, -1, \dots, -1)$$

$\square$