

**Übungen zur Vorlesung „Riemann’sche Mannigfaltigkeiten“
WS 11/12, Blatt 1, abzugeben bis zum 19.10.2011.**

- 1) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige und bijektive Abbildung topologischer Hausdorffräume, X sei kompakt. Man zeige, dass f topologisch ist.
- 2) Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle (auch halboffene und unbeschränkte Intervalle sind zugelassen). Sei $f : I \rightarrow J$ eine stetige bijektive Abbildung. Man zeige, dass f topologisch ist.
- 3) Man gebe zwei Teilmengen A, B der Ebene \mathbb{R}^2 und eine stetige bijektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ an, welche nicht topologisch ist.
- 4) Sei $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < 2\pi\}$. Man zeige, dass das Bild von U unter der Abbildung

$$k(x, y) = (\cosh(x) \cos(y), \cosh(x) \sin(y), x)$$

ein Flächenstück im \mathbb{R}^3 ist, welches durch k regulär parametrisiert wird. Man berechne die Fundamentalform g . Man mache sich ein Bild über die Gestalt der Fläche. (Es handelt sich um ein Katenoid).

**Übungen zur Vorlesung „Riemann'sche Mannigfaltigkeiten“
WS 11/12, Blatt 2, abzugeben bis zum 26.10.2011.**

5) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine parametrisierbare Untermannigfaltigkeit der Dimension d . Sei $x \in X$. Ein Vektor $A \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor von X in x , falls es eine glatte Kurve $u : (-1, 1) \rightarrow X$ mit $\dot{u}(0) = A$ gibt. Man zeige, dass die Menge aller Tangentialvektoren einen d -dimensionalen Vektorraum $T_x X$ bildet.

Anleitung. Man betrachte eine Parametrisierung $\alpha : D \rightarrow X$, $\alpha(a) = x$ und zeige, dass die Menge der Tangentialvektoren das Bild der durch die Jacobimatrix $J(\alpha, a)$ vermittelten linearen Abbildung $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist.

6) Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ parametrisierbare Untermannigfaltigkeiten. Geben Sie eine sinnvolle Definition für den Begriff einer differenzierbaren Abbildung $f : X \rightarrow Y$. Zeigen Sie, dass jede differenzierbare Abbildung für jeden Punkt $x \in X$ eine lineare Abbildung $T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ nach sich zieht.

7) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine differenzierbare Abbildung und sei $a \in X$ ein Punkt, so dass die Tangentialabbildung $T_a X \rightarrow T_{f(a)} Y$ ein Isomorphismus ist. Man zeige, dass es eine offene Umgebung $a \in U \subset X$ gibt, so dass ihr Bild V offen in Y ist und so dass f einen Diffeomorphismus (man definiere, was das ist) von U auf V vermittelt.

**Übungen zur Vorlesung „Riemann'sche Mannigfaltigkeiten“
WS 11/12, Blatt 3, abzugeben bis zum 4.11.2011.**

8) Sei $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die Stammfunktion der Funktion

$$\frac{1}{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

mit dem Anfangswert $f(1) = 0$. (Es handelt sich um eine Tratrix.) Man zeige

$$f(x) = - \int_0^{-\log x} \sqrt{1 - e^{2t}} dt.$$

Die sogenannte Pseudosphäre ist das Bild der Abbildung

$$\mathbb{R} \times (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \left(\frac{\cos x_1}{x_2}, \frac{\sin x_1}{x_2}, f(x_2) \right).$$

Man beschreibe die Gestalt der Pseudosphäre.

9) Schränkt man die Abbildung aus Aufgabe 8) auf $(-\pi, \pi) \times (1, \infty)$ ein, so erhält man eine reguläre Parametrisierung eines offenen Teils der Pseudosphäre. Man berechne die Fundamentalform $g(x)$.

10) Die Poincaré'sche Halbebene ist das Riemann'sche Gebiet

$$\mathbb{H} = \{(x, y); y > 0\}$$

versehen mit der Riemann'schen Metrik

$$g(x, y) = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne alle Christoffelsymbole und stelle die Differentialgleichung für die Geodätischen auf. Man zeige, dass

$$u(t) = (C, e^t), \quad -\infty < t < \infty,$$

eine Geodätische ist.

Anmerkung. Ein offener Teil der Poincaré'schen Halbebene parametrisiert eine Fläche im \mathbb{R}^3 , wie wie in Aufgabe 9 gesehen haben. Man beschreibe den Verlauf der Geodätischen (C, e^t) in der Pseudosphäre (soweit sie dort erscheint). Hilbert hat bewiesen, dass es keine Fläche im \mathbb{R}^3 gibt, welche durch die ganze Poincaré'sche Halbebene parametrisiert wird. Es gibt jedoch eine solche im \mathbb{R}^4 . Ein tiefer Satz von Nash besagt, dass jedes Riemann'sche Gebiet eine (sogar abgeschlossene) Fläche im \mathbb{R}^n , n geeignet, parametrisiert.

**Übungen zur Vorlesung „Riemann’sche Mannigfaltigkeiten“
WS 11/12, Blatt 4, abzugeben bis zum 11.11.2011.**

11) Wir identifizieren \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 . Die Poincarè’sche Halbebene \mathbb{H} kann dann mit der Menge aller $z = x + iy$, $y > 0$, identifiziert werden. Man zeige

- a) Für $a \in \mathbb{R}$ ist $z \mapsto z + a$ eine Isometrie von \mathbb{H} .
- b) Für $a > 0$ ist $z \mapsto az$ eine Isometrie vom \mathbb{H} .
- c) Die Abbildung $z \mapsto -1/z$ definiert eine Isometrie von \mathbb{H} .

12) Sei G der Teil einer Kreislinie mit Mittelpunkt in \mathbb{R} , welcher in der oberen Halbebene liegt. Man zeige, dass eine Geodätische existiert, deren Bild genau G ist.

Tip. Man benutze, dass (C, e^t) eine Geodätische ist und wende die vorhergehende Aufgabe an.

13) Man zeige, dass sich je zwei Punkte in der Poincarè’schen Halbeben durch eine Geodätische verbinden lassen. Man skizziere eine solche für die Punkte $1 + i$, $-1 + i$.

**Übungen zur Vorlesung „Riemann’sche Mannigfaltigkeiten“
WS 11/12, Blatt 5, abzugeben bis zum 18.11.2011.**

14) Den Torus stellt man sich im allgemeinen als Teilmenge des \mathbb{R}^3 vor. Es ist jedoch viel einfacher, einen Torus im \mathbb{R}^4 zu finden. Dazu betrachte man

$$X := \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4; \quad x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Man zeige, dass jeder Punkt $a \in X$ eine offene Umgebung besitzt, so dass sich U regulär durch eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^2$ parametrisieren läßt. Das zugehörige Riemann’sche Gebiet (V, g) ist flach.

15) Man betrachte den Torus X wie in der vorhergehenden Aufgabe. Die Kurve

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow X, \quad u(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(\sqrt{2}t), \sin(\sqrt{2}t))$$

ist regulär. Sie ist auch injektiv. Sei Y ihr Bild. Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow Y$ also stetig, regulär und bijektiv. Man zeige außerdem:

- a) Y liegt dicht in X .
- b) u ist keine reguläre Parametrisierung.
- c) u ist geodätisch.

(Gemeint ist damit, dass jedes Stück von u , das in einem parametrisierbaren Teil von X verläuft, geodätisch ist.)

16) Im Torus X gibt es geschlossen Geodätische. Man gebe Beispiele an.

Anmerkung. Dieser Torus stellt eine Beispiel einer Fläche dar, die lokal euklidisch und dennoch geschlossen (kompakt) ist.

**Übungen zur Vorlesung „Riemann’sche Mannigfaltigkeiten“
WS 11/12, Blatt 6, abzugeben bis zum 25.11.2011.**

17) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Menge. Zu jedem Punkt $a \in X$ gibt es eine glatte Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ mit $\alpha(0) = a$, für welche

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{\alpha}_i^2(t)$$

konstant und von Null verschieden ist.

Tip. Man darf annehmen, dass X regulär parametrisierbar ist.

18) Man zeige, dass das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ keine glatte Teilmenge von \mathbb{R} ist.

Tip. Man benutze die vorhergehende Aufgabe.

19) Man zeige, dass der Rand des Vierecks $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

20) Man zeige, dass der Rand des Vierecks $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ keine glatte Teilmenge von \mathbb{R}^2 ist.

**Übungen zur Vorlesung „Riemann’sche Mannigfaltigkeiten“
WS 11/12, Blatt 7, abzugeben bis zum 2.12.2011.**

21) Man gebe ein Beispiel für eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, welche differenzierbar ist, deren Umkehrung aber nicht differenzierbar ist.

22) In Blatt 2, Aufgabe 5 haben wir für eine parametrisierbare Mannigfaltigkeit $D \xrightarrow{\sim} X \subset \mathbb{R}^n$ und einen Punkt $a \in X$ einen (konkreten, geometrisch motivierten) Tangentialraum $T_a X$ eingeführt. Wir bezeichnen diesen hier mit $G_a X$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass X glatt ist und damit eine differenzierbare Mannigfaltigkeit wird. Daher kann man den abstrakten Tangentialraum $T_a X$ betrachten. Man gebe einen natürlichen Isomorphismus an.

23) Man stütze sich auf die vorhergehende Aufgabe. In Blatt 2, Aufgabe 6 wurde die Tangentialabbildung der konkreten Tangentialräume parametrisierbarer Mannigfaltigkeiten eingeführt. Man zeige, dass diese genau den Tangentialabbildungen der abstrakten Tangentialraumtheorie entsprechen. (Am besten drückt man dies durch ein kommutatives Diagramm aus.)

**Übungen zur Vorlesung „Riemann’sche Mannigfaltigkeiten“
WS 11/12, Blatt 8, abzugeben bis zum 9.12.2011.**

24) Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation, also eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \dots, n\}$ auf sich. Man zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus

$$V^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} V^{\otimes n}, \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \longmapsto v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}$$

gibt. Ein Tensor $T \in V^{\otimes n}$ heißt alternierend, falls $T^\sigma = \text{sgn}(\sigma)T$ für alle $\sigma \in S_n$ gilt. Man zeige, dass ein Tensor genau dann alternierend ist, falls $T(a_1, \dots, a_n)$ verschwindet, wenn zwei der Einträge a_i übereinstimmen.

25) Die Menge $\bigwedge^p V \subset V^{\otimes p}$ der alternierenden Tensoren ist ein Untervektorraum. Sei $T \in V^{\otimes p}$. Dann ist

$$T^{\text{alt}} := \frac{1}{(\dim V)!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) T^\sigma$$

ein alternierender Tensor. Dies definiert eine lineare Abbildung

$$V^{\otimes p} \longrightarrow \bigwedge^p V,$$

deren Einschränkung auf $\bigwedge^p V$ die Identität ist.

26) Die Menge $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ der Matrizen der Determinante 1 ist ein glatter Teil des Vektorraums $\mathbb{R}^{(n,n)}$ und damit selbst eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Folgendes Glattheitskriterium darf verwendet werden: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f \in C^\infty(U)$. Die Nullstellenmenge von f ist glatt, wenn f und seine partiellen Ableitungen keine gemeinsame Nullstelle besitzen. Die Dimension ist dann in jedem Punkt $n - 1$.

Man zeige, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{SL}(n, \mathbb{R}) \times \text{SL}(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \text{SL}(n, \mathbb{R}) \quad (\text{Multiplikation}), \\ \text{SL}(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \text{SL}(n, \mathbb{R}) \quad (\text{Invertieren}) \end{aligned}$$

differenzierbar sind. (Es handelt sich also um eine Liegruppe).

27) Für eine $n \times n$ -Matrix konvergiert die Reihe

$$\exp(A) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A^\nu}{\nu!}.$$

Man zeige

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{Spur}(A)).$$

Sei \mathfrak{g} die Menge aller $n \times n$ -Matrizen der Spur 0. Man zeige, dass die Abbildung

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \text{SL}(n, \mathbb{R}), \quad A \longmapsto \exp(A)$$

lokal diffeomorph bei 0 ist.

**Übungen zur Vorlesung „Riemann’sche Mannigfaltigkeiten“
WS 11/12, Blatt 9, abzugeben bis zum 16.12.2011.**

28) In der Vorlesung wurde für einen endlich dimensionalen Vektorraum V ein kanonischer Isomorphismus $V \otimes_{\mathbb{R}} V^* \cong \text{Hom}(V, V)$ konstruiert. Sei e_1, \dots, e_n eine Basis von V und e_1^*, \dots, e_n^* die duale Basis. Das Element $e_i \otimes e_j^*$ entspricht einer linearen Abbildung $V \rightarrow V$. Man gebe ihre Matrix bezüglich der Basis e_1, \dots, e_n an. Was ist ihre Spur? Man folgere, dass die Spur der einem Element $a \otimes l \in V \otimes V^*$ zugeordneten linearen Abbildung gleich $l(a)$ ist.

29) Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum, auf welchem eine nicht ausgeartete Bilinearform $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ausgezeichnet wurde. In der Vorlesung wurde g ein Isomorphismus $V \rightarrow V^*$ zugeordnet. Sei e_1, \dots, e_n eine Basis von V . Man drücke das Bild von e_i in V^* in Termen der dualen Basis e_1^*, \dots, e_n^* und der Matrix mit den Einträgen $g_{ik} := g(e_i, e_k)$ aus.

30) Sei f eine differenzierbare Funktion auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Man definiert das Differential df durch die Formel

$$df(A) := Af.$$

(Hierbei sei A ein Vektorfeld auf irgendeiner offenen Teilmenge.) Man zeige, dass hierdurch wirklich ein Differential erklärt wird. Sei $u : [0, 1] \rightarrow X$ eine geschlossene glatte Kurve. Man zeige

$$\int_{\alpha} df = 0.$$

31) Sei ω ein Differential auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Wir ordnen je zwei Vektorfeldern A, B die differenzierbare Funktion

$$T(A, B) := B(\omega(A)) - A(\omega(B)) - \omega([A, B])$$

zu. Man zeige, dass

$$T(fA, gB) = fgT(A, B) \quad \text{für } f, g \in C^{\infty}$$

gilt. (Dabei bezeichnet $[A, B]$ die Lieklammer, welche in der Vorlesung eingeführt wurde.)

Tip. Man beweise zuerst $[fA, B] = f[A, B] + (Bf)A$.

**Übungen zur Vorlesung „Riemann’sche Mannigfaltigkeiten“
WS 11/12, Blatt 10, abzugeben bis zum 13.1.2012.**

32) Man betrachte die Abbildung

$$(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) := (x_1 + x_2, x_1 x_2)$$

und berechne $f^*(dy_1)$ und $f^*(dy_2)$.

33) Was ist ein pseudoriemannsches Gebiet? Was ist ein Riemann’sches Gebiet?

34) Sei $u : [0, 1] \rightarrow (D, g)$ eine glatte Kurve in einem Riemann’schen Gebiet. Was versteht man unter einer Variation von u ? Wie kann man mit diesem Begriff erklären, was es bedeutet, dass u geodätisch ist?

35) Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und a ein Punkt aus X . Was versteht man unter einer Derivation in a ? Was ist der Tangentialraum $T_a X$?

36) Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $u : I \rightarrow X$ eine glatte Kurve. Was versteht man unter $\dot{u}(t)$?

37) Sei T ein zweifach kovarianter Tensor auf einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit. Was ist die Verjüngung von T ? Seien T_{ij} die Komponenten von T bezüglich einer gegebenen Karte. Wie berechnet man die Verjüngung?

38) Was versteht man unter einem Zusammenhang auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit?

39) Was sind die definierenden Eigenschaften des Levi-Civita Zusammenhangs?

40) Sei ∇ ein Zusammenhang auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Wie ist der zugehörige Krümmungstensor erklärt?

41) Die Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \ x_1 > 0, \ x_2 > 0\}$ wird ein pseudoriemannsches Gebiet mittels

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Was ist die Krümmung?

**Übungen zur Vorlesung „Riemann’sche Mannigfaltigkeiten“
WS 11/12, Blatt 11, abzugeben bis zum 20.1.2012.**

Im folgenden sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

42) Man kann (differenzierbare) Vektorfelder auf X einführen als Familien von Abbildungen $\mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$, ($U \subset X$ offen). Was sind die definierenden Eigenschaften?

43) Man kann (differenzierbare) Dualfelder (Differentialen) einführen als Familien von Abbildungen $\mathcal{T}(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$ ($U \subset X$ offen). Dabei bezeichne $\mathcal{T}(U)$ die Menge der differenzierbaren Vektorfelder auf X . Was sind die definierenden Eigenschaften?

44) Wie ist das Differential dx_i auf \mathbb{R}^n erklärt? (Man gebe seine Wirkung auf das Vektorfeld $\sum f_i \partial/\partial x_i$ an.)

45) Man kann (differenzierbare) Vektorfelder auf X auch einführen als Familien von Abbildungen $\mathcal{T}^*(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$ ($U \subset X$ offen). Dabei bezeichne $\mathcal{T}^*(U)$ die Menge der Differentialen auf X . Was sind die definierenden Eigenschaften?

46) Wie wirkt das Vektorfeld $\partial/\partial x_i$ auf das Differential $\sum f_i dx_i$?

47) Man kann (differenzierbare) Tensorfelder auf X auch einführen als Familien von Abbildungen

$$\mathcal{T}^*(U) \times \cdots \times \mathcal{T}^*(U) \times \mathcal{T}(U) \times \cdots \times \mathcal{T}(U) \rightarrow \times \mathcal{C}^\infty(U) \quad (U \subset X \text{ offen}).$$

Was sind die definierenden Eigenschaften?

48) Was versteht man unter der skalaren Krümmung einer Riemann’schen Mannigfaltigkeit. Seien R_{ijkl} die Komponenten des Riemann’schen Krümmungstensors (in kovarianter Form) bezüglich einer Karte. Man gebe eine Formel für die skalare Krümmung an.

49) Die skalare Krümmung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist eine isometrische Invariante. Was bedeutet diese Aussage?

50) Man gebe ein Beispiel für ein zweidimensionales Riemann’sches Gebiet an, dessen Krümmung konstant negativ ist.

51) Sei $u : I \rightarrow D$ eine glatte Kurve auf einem Riemann’schen Gebiet (D, g) . Was bedeutet es, dass u dem Variationsprinzip genügt?

52) Was versteht man unter der Ricciskrümmung einer Riemann’schen Mannigfaltigkeit? Seien R_{ijkl} die Komponenten des Riemann’schen Krümmungstensors (in kovarianter Form) bezüglich einer Karte. Man gebe eine Formel für die Komponenten des Riccitors an.

53) Sei (D, g) ein Riemann’sches Gebiet. Sei $a \in D$ ein Punkt, so dass alle partiellen Ableitungen der Ordnung eins und zwei verschwinden. Was ist die skalare Krümmung im Punkt a ? (Man gebe eine kurze Begründung an.)

**Übungen zur Vorlesung „Riemann’sche Mannigfaltigkeiten“
WS 11/12, Blatt 12, abzugeben bis zum 27.1.2012.**

- 54) Sei $\varphi : D \rightarrow X$ eine reguläre Parametrisierung einer Hyperfläche $X \subset \mathbb{R}^n$. Wie kann man einen von Null verschiedenen Normalenvektor in einem gegebenen Punkt $x \in X$ explizit berechnen?
- 55) Wie definiert man die Metrik d (Abstandsfunktion) für eine Riemann’sche Mannigfaltigkeit?
- 56) Was besagt der Satz von Hopf-Rinow?
- 57) Sei V ein Vektorraum. Wie definiert man den kanonischen Homomorphismus von V in sein Doppeldual?
- 58) Sei $f : (D, g) \rightarrow (D', h)$ eine Isometrie Riemann’scher Gebiete. Wie hängen g und h zusammen?
- 59) Wann heißt eine offenen Umgebung eines Punktes einer Riemann’schen Mannigfaltigkeit geodätisch konvex?
- 60) Sei $a \in X$ ein Punkt einer Riemann’schen Mannigfaltigkeit. Wie definiert man die Exponentialfunktion $\exp : T_a X \rightarrow X$?
- 61) Sei $a \in X$ ein Punkt einer Riemann’schen Mannigfaltigkeit und $V \subset T_a X$ ein zwei-dimensionaler Untervektorraum. Wie definiert man die Schnittkrümmung $K_{a,V}$?
- 62) Was ist die Gauß’sche Krümmung des Zylinders

$$\{(x_1, x_2, x_3); x_1^2 + x_2^2 = 1\}?$$

- 63) Seien V_1, \dots, V_n Vektorräume und $1 \leq a \leq n$. Wie definiert man das Tensorprodukt $T \otimes S$ zweier Multilinearformen $T \in \text{Mult}(V_1, \dots, V_a)$, $S \in \text{Mult}(V_{a+1}, \dots, V_n)$?