

1. Topologische Grundbegriffe

Eine *Topologie* \mathcal{T} auf einer Menge X ist ein System von Teilmengen mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- 2) Der Durchschnitt von endlich vielen Mengen aus \mathcal{T} gehört zu \mathcal{T} .
- 3) Die Vereinigung von beliebig vielen Mengen aus \mathcal{T} gehört zu \mathcal{T} .

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, \mathcal{T}) , bestehend aus einer Menge X und einer Topologie \mathcal{T} auf X . Da gewöhnlich aus dem Zusammenhang heraus klar ist, welche Topologie gerade auf einer vorgelegten Menge X betrachtet wird, schreibt man meist X anstelle von (X, \mathcal{T}) ,

$$\text{„}X = (X, \mathcal{T}\text{“}.$$

Die Elemente von \mathcal{T} heißen auch die *offenen Teile* von X .

Wir geben einige wichtige Konstruktionsprinzipien für Topologien an.

I Metrische Räume und ihre Topologie

- 1) Eine Metrik d auf einer Menge X ist eine Abbildung

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit den Eigenschaften

- a) $d(a, b) = 0 \iff a = b$,
- b) $d(a, b) = d(b, a)$,
- c) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) \quad (a, b, c \in X)$.

Man ordnet dem „metrischen Raum“ (X, d) die „übliche Topologie“ zu. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen*, falls es zu jedem $a \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

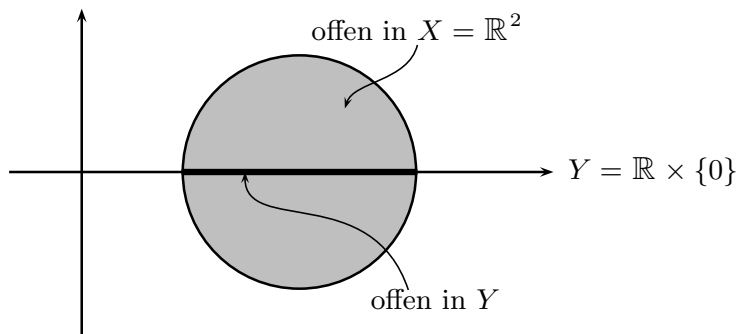
$$U_\varepsilon(a) \subset U \quad (U_\varepsilon(a) := \{x \in X; d(a, x) < \varepsilon\}).$$

Beispiel. Die reelle Gerade oder die komplexe Zahlenebene \mathbb{C} , allgemeiner \mathbb{R}^n , können beispielsweise mit der euklidischen Metrik versehen werden und werden so zu topologischen Räumen.

II Die induzierte Topologie

Sei Y eine Teilmenge eines topologischen Raumes $X = (X, \mathcal{T})$. Man versieht Y mit einer Topologie $\mathcal{T}|_Y$, der sogenannten *induzierten Topologie* oder *Teilraumtopologie*:

Eine Teilmenge $V \subset Y$ gehört genau dann zu $\mathcal{T}|_Y$, falls es eine Teilmenge $U \subset X$, $U \in \mathcal{T}$, gibt, so dass $V = U \cap Y$. (Ist Y selbst schon ein offener Teil von X , so bedeutet dies einfach $V \in \mathcal{T}$.)



III Die Quotiententopologie

Sei X ein topologischer Raum und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung auf eine Menge Y . Man versieht Y mit der *Quotiententopologie*. Eine Teilmenge $V \subset Y$ heißt genau dann *offen*, falls ihr Urbild $U := f^{-1}(V)$ offen in X ist.

Spezialfall. Sei „ \sim “ eine Äquivalenzrelation auf X und Y die Menge der Äquivalenzklassen und $f : X \rightarrow Y$ die kanonische Projektion. Man nennt Y dann auch den *Quotientenraum* von X nach der vorgelegten Äquivalenzrelation.

Beispiele.

- a) Der Torus $X = \mathbb{C}/L$ ($L \subset \mathbb{C}$ ein Gitter).
- b) Der „Modulraum“ $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

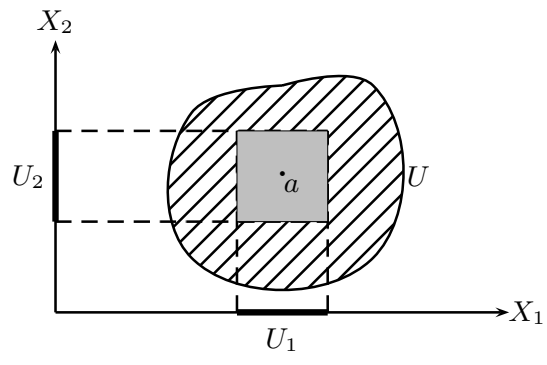
IV Die Produkttopologie

Seien X_1, \dots, X_n endlich viele topologische Räume. Auf dem kartesischen Produkt

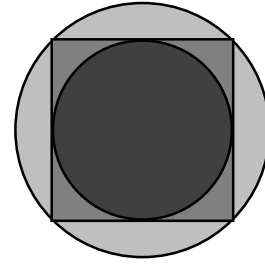
$$X = X_1 \times \cdots \times X_n$$

wird die *Produkttopologie* eingeführt.

Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt genau dann *offen*, falls es zu jedem Punkt $a \in U$ offene Teile $U_1 \subset X_1, \dots, U_n \subset X_n$ gibt, so dass $a \in U_1 \times \cdots \times U_n \subset U$.



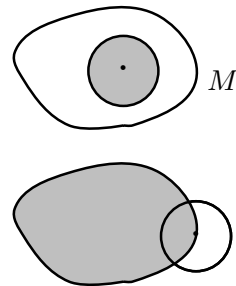
Versieht man \mathbb{R}^n mit der Topologie, welche von der euklidischen Metrik herrührt, so erhält man genau die Produkttopologie von n Exemplaren der reellen Geraden. Dies folgt aus der bekannten Tatsache, dass die euklidische Metrik und die Maximummetrik auf dem \mathbb{R}^n äquivalent sind (s. Aufgabe 1).



Abgeleitete topologische Begriffe

a) für Teilmengen eines topologischen Raumes X

- 1) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls ihr Komplement $X - A$ offen ist.
- 2) Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt *Umgebung* eines Punktes $a \in X$, falls es einen offenen Teil $U \subset X$ mit $a \in U \subset M$ gibt.
- 3) Ein Punkt $a \in X$ heißt *Randpunkt* von $M \subset X$, falls in *jeder* Umgebung von a sowohl Punkte von M als auch vom Komplement $X - M$ von M enthalten sind.



Bezeichnung.

$$\begin{aligned}\partial M &:= \text{Menge der Randpunkte,} \\ \bar{M} &:= M \cup \partial M.\end{aligned}$$

Man zeigt. \bar{M} ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , welche M umfasst, d.h.

$$\bar{M} = \bigcap_{\substack{M \subset A \subset X, \\ A \text{ abgeschlossen}}} A.$$

Außerdem gilt

$$M \text{ abgeschlossen} \iff M = \bar{M}.$$

Man nennt \bar{M} den *Abschluss* von M .

b) für Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen

Die Abbildung f heißt *stetig* in einem Punkt $a \in X$, falls das Urbild $f^{-1}(V(b))$ jeder Umgebung von $b := f(a)$ eine Umgebung von a (in X) ist. Man nennt f *stetig schlechthin*, wenn f in jedem Punkt stetig ist.

Äquivalent sind:

- 1) f ist stetig,
- 2) das Urbild einer beliebigen offenen Teilmenge von Y ist offen (in X),
- 3) das Urbild einer beliebigen abgeschlossenen Teilmenge von Y ist abgeschlossen (in X).

Die Zusammensetzung zweier stetiger Abbildungen

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

ist stetig. (Dies gilt in naheliegenderem Sinne sowohl „punktuell“ als auch „schlechthin“.)

Universelle Eigenschaften der konstruierten Topologien

1) Die induzierte Topologie

Sei Y eine Teilmenge eines topologischen Raumes X , versehen mit der induzierten Topologie. Eine Abbildung $f : Z \rightarrow Y$ eines dritten topologischen Raumes Z in Y ist genau dann stetig, wenn ihre Zusammensetzung mit der natürlichen Inklusion i

$$i \circ f : Z \longrightarrow X \quad (i : Y \hookrightarrow X, i(y) = y)$$

stetig ist. Insbesondere ist i stetig.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \downarrow i \\ & i \circ f & X \end{array}$$

2) Die Quotiententopologie

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung topologischer Räume, wobei Y die Quotiententopologie trage. Eine Abbildung $h : Y \rightarrow Z$ in einen dritten topologischen Raum Z ist genau dann stetig, wenn die Zusammensetzung

$$h \circ f : X \longrightarrow Z$$

stetig ist. (Insbesondere ist f stetig.)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \downarrow h \\ & h \circ f & Z \end{array}$$

3) Die Produkttopologie

Seien X_1, \dots, X_n topologische Räume und

$$f : Y \longrightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$$

eine Abbildung eines weiteren topologischen Raumes Y in ihr kartesisches Produkt, versehen mit der Produkttopologie. Die Abbildung f ist genau dann stetig, wenn jede ihrer Komponenten

$$\begin{aligned} f_j &= p_j \circ f : Y \longrightarrow X_j, \\ p_j : X_1 \times \cdots \times X_n &\longrightarrow X_j \quad j\text{-te Projektion,} \end{aligned}$$

stetig ist. (Insbesondere sind die Projektionen p_j stetig.)

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X_1 \times \cdots \times X_n \\ & \searrow p_\nu \circ f & \downarrow p_\nu \\ & & X_\nu \end{array}$$

Topologische Abbildungen

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ topologischer Räume heißt *topologisch*, falls sie bijektiv ist und falls f und f^{-1} beide stetig sind. Zwei topologische Räume X, Y heißen *topologisch äquivalent* (oder auch homöomorph), falls eine topologische Abbildung $f : X \rightarrow Y$ existiert.

Beispiele

(Die beiden folgenden Beispiele werden in §1 genauer behandelt.)

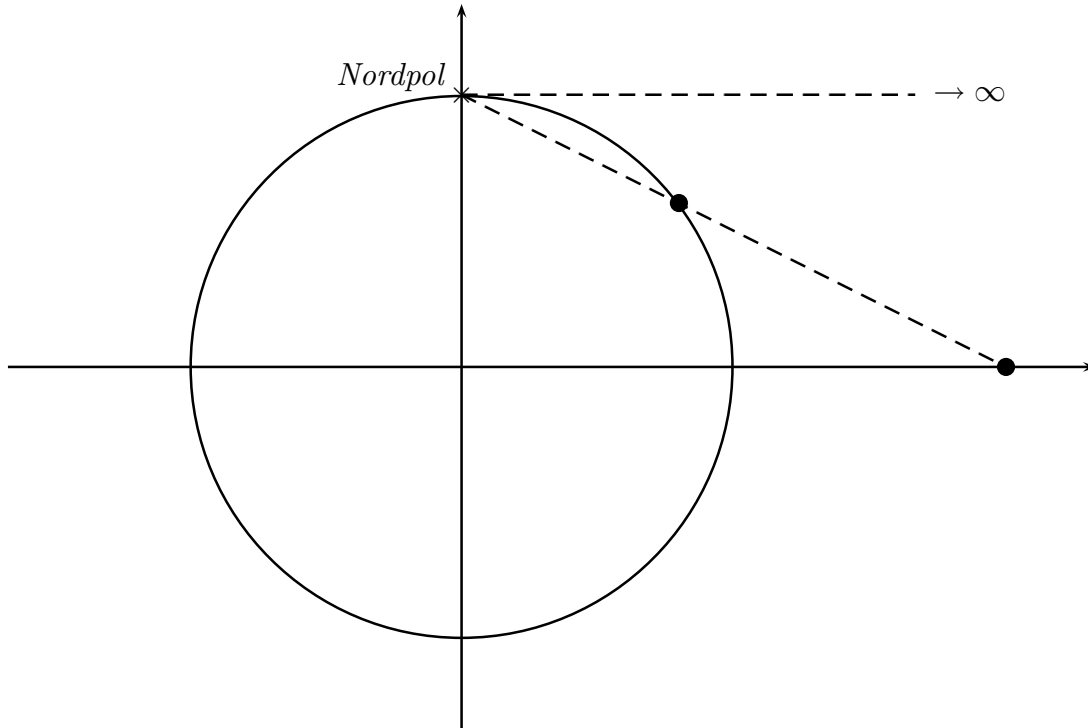
1) Die 2-Sphäre

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

und die RIEMANN'sche Zahlkugel sind homöomorph,

$$S^2 \simeq \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Dies zeigt man beispielsweise mit Hilfe der stereographischen Projektion (s. auch [FB], Kapitel III, Anhang zu §4 und 5 im Anschluss an Theorem A.8):



2) Ist $L \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, so ist der Torus \mathbb{C}/L homöomorph zum kartesischen Produkt zweier Kreislinien:

$$\mathbb{C}/L = \text{Torus} \simeq S^1 \times S^1.$$

Einige Eigenschaften topologischer Räume

1) Ein topologischer Raum X heißt *Hausdorff'sch* oder ein *Hausdorffraum*, falls zu je zwei verschiedenen Punkten $a, b \in X$ disjunkte Umgebungen $U(a)$ und $U(b)$ existieren ($U(a) \cap U(b) = \emptyset$).

2) Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, falls er HAUSDORFF'sch ist und falls er die HEINE-BOREL'sche Überdeckungseigenschaft besitzt, d.h. ist

$$X = \bigcup_{j \in I} U_j$$

eine beliebige Überdeckung von X durch offene Teilmengen, so existiert eine *endliche* Teilmenge $J \subset I$ mit

$$X = \bigcup_{j \in J} U_j.$$

Eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes X heißt *kompakt*, wenn sie, mit der induzierten Topologie versehen, ein kompakter topologischer Raum ist.

Einige Eigenschaften kompakter Räume

- a) Kompakte Teile eines topologischen Raumes sind stets abgeschlossen.
- b) Ein abgeschlossener Teil eines kompakten Raumes ist kompakt.
- c) Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung von HAUSDORFFRäumen, so ist das Bild $f(K)$ eines kompakten Teils $K \subset X$ stets kompakt.
- d) Sei X kompakt, Y ein HAUSDORFFraum und $f : X \rightarrow Y$ bijektiv und stetig. Dann ist f sogar topologisch.
- e) Das kartesische Produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ von kompakten Räumen ist kompakt.

Lokal kompakte Räume und eigentliche Abbildungen

Ein topologischer Raum X heißt *lokal kompakt*, falls er HAUSDORFF'sch ist und falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

Eine stetige Abbildung

$$f : X \longrightarrow Y$$

von lokal kompakten Räumen X und Y heißt *eigentlich*, falls das Urbild $f^{-1}(K)$ einer beliebigen kompakten Menge $K \subset Y$ kompakt ist.

Wir formulieren zwei wichtige Eigenschaften eigentlicher Abbildungen.

1.1 Bemerkung. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine eigentliche Abbildung. Das Bild $f(A)$ einer abgeschlossenen Menge $A \subset X$ ist abgeschlossen.

Beweis. In einem lokal kompakten Raum ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn ihr Durchschnitt mit jedem Kompaktum kompakt ist. Sei also $K \subset Y$ kompakt. Offenbar ist $K \cap f(A)$ das Bild der kompakten Menge $f^{-1}(K) \cap A$ und damit selbst kompakt.

1.2 Bemerkung. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine eigentliche Abbildung. Gegeben seien eine kompakte Teilmenge $K \subset Y$ und eine offene Teilmenge $U \subset X$, welche das Urbild von K umfasst,

$$U \supset f^{-1}(K).$$

Dann existiert eine offene Teilmenge $V \subset Y$, mit den Eigenschaften

$$K \subset V \subset Y, \quad f^{-1}(V) \subset U.$$

Beweis. Die Menge $X - U$ ist abgeschlossen. Nach 1) ist ihr Bild $f(X - U)$ in Y abgeschlossen. Man kann daher für V ihr Komplement nehmen. \square

Konvergente Folgen

Eine Folge (a_n) in einem HAUSDORFFraum X konvergiert gegen $a \in X$, falls es zu jeder Umgebung $U(a)$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n \in U \text{ für } n \geq N$$

gibt. Man schreibt hierfür kurz

$$a_n \longrightarrow a \text{ für } n \longrightarrow \infty.$$

Der Grenzwert a ist eindeutig bestimmt (wegen der HAUSDORFF-Eigenschaft).

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ topologischer HAUSDORFFräume heißt *folgenstetig*, falls

$$a_n \longrightarrow a \implies f(a_n) \longrightarrow f(a).$$

Eine Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen HAUSDORFFraumes heißt *folgenabgeschlossen*, falls für jede Folge

$$[a_n \longrightarrow a, \quad a_n \in A \text{ für alle } n] \implies a \in A,$$

und *folgenkompakt*, falls jede Folge aus A einen Häufungspunkt besitzt. (Ein Punkt a heißt Häufungspunkt einer Folge (a_n) , falls es eine Teilfolge gibt, welche gegen a konvergiert.)

Man zeigt

$$\begin{aligned} \text{stetig} &\implies \text{folgenstetig,} \\ \text{abgeschlossen} &\implies \text{folgenabgeschlossen,} \\ \text{kompakt} &\implies \text{folgenkompakt.} \end{aligned}$$

Die Umkehrung hiervon ist richtig für HAUSDORFFräume mit *abzählbarer Basis der Topologie*.

Das soll folgendes heißen:

Es existiert eine Folge U_1, U_2, U_3, \dots von offenen Mengen, so dass sich jede offene Menge U als Vereinigung von gewissen Mengen U_n schreiben lässt. Insbesondere hat dann auch jede Teilmenge von X abzählbare Basis der Topologie.

Beispiel. Der \mathbb{R}^n . Man nimmt euklidische Kugeln mit rationalen Radien und mit Mittelpunkten, deren Koordinaten rational sind.

Zusammenhang

Ein topologischer Raum X heißt *bogenweise zusammenhängend*, falls sich je zwei Punkte in X durch ein Kurve verbinden lassen. (Eine Kurve in X ist eine stetige Abbildung eines reellen Intervalls in X .)

Ein topologischer Raum heißt *zusammenhängend*, falls eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- 1) Jede lokal konstante Abbildung $f : X \rightarrow M$ in irgendeine Menge M ist konstant. Es genügt dabei für M irgendeine feste Menge zu nehmen, welche mindestens zwei Elemente enthält.
- 2) Ist $X = U \cup V$ Vereinigung zweier disjunkter offener Teilmengen U, V , so ist U oder V leer (und daher $V = X$ oder $U = X$).

Nach dem Zwischenwertsatz ist jedes reelle Intervall zusammenhängend. Folgedessen ist jeder bogenweise zusammenhängende Raum zusammenhängend. Die Umkehrung gilt jedoch im allgemeinen nicht, jedoch für Mannigfaltigkeiten, insbesondere für Flächen (s.u.).

Bogenkomponenten

Wir nennen zwei Punkte eines topologischen Raumes X äquivalent, falls sie sich durch eine Kurve miteinander verbinden lassen. Die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation nennt man die *Bogenkomponenten* von X . Sie sind bogenweise zusammenhängend.

Eine (*topologische*) *Mannigfaltigkeit* X der Dimension n ist ein HAUSDORFFraum, so dass jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, welche zu einem offenen Teil des \mathbb{R}^n homöomorph ist. Ein nichttriviales Resultat besagt, dass die Dimension n eindeutig bestimmt ist. Wir benötigen dieses Resultat jedoch nicht. Eine *Fläche* ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension zwei. Offensichtlich gilt:

Wenn X eine Mannigfaltigkeit ist, so sind die Bogenkomponenten offen in X .

Die Bogenkomponenten sind daher selbst (zusammenhängende) Mannigfaltigkeiten. Man nennt die Bogenkomponenten einer Mannigfaltigkeit auch ihre *Zusammenhangskomponenten*.

Eine Mannigfaltigkeit ist insbesondere genau dann zusammenhängend, wenn sie bogenweise zusammenhängend ist.

In der Theorie der Mannigfaltigkeiten kann man sich daher häufig auf die Betrachtung zusammenhängender Mannigfaltigkeiten beschränken.