

1. Formulierung des Schottkyproblems

Sei C eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g > 1$. Sei $\Omega(C)$ der Vektorraum der überall holomorphen Differentiale. Er hat die Dimension g . Wir betrachten seinen Dualraum $\Omega(C)^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega(C), \mathbb{C})$. Jeder geschlossenen Kurve α ist ein Element aus $\Omega(C)^*$ zugeordnet (Integration längs α). Dies definiert eine Abbildung

$$H_1(C, \mathbb{Z}) \longrightarrow \Omega(C)^*.$$

Diese Abbildung ist injektiv und ihr Bild ist ein Gitter, also eine diskrete Untergruppe, welche zu \mathbb{Z}^{2g} isomorph ist. Die Jacobische Varietät ist der komplexe Torus

$$\text{Jac}(C) = \Omega(C)^*/H_1(C, \mathbb{Z}).$$

Man kann eine symplektische Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ wählen, d.h. die Schnittmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \text{ Nullmatrix, } I \text{ Einheitsmatrix.}$$

Riemann hat gezeigt, dass die Bilder der $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ eine Basis des \mathbb{C} -Vektorraums $\Omega(C)^*$ bilden. Die duale Basis in $\Omega(C)$ sei $\omega_1, \dots, \omega_g$. Wir fassen sie zu einem Spaltenvektor ω zusammen. Die Periodenmatrix ist die $g \times 2g$ -Matrix

$$P = \left(\int_{\alpha_1} \omega, \dots, \int_{\alpha_g} \omega, \int_{\beta_1} \omega, \dots, \int_{\beta_g} \omega \right).$$

Sie ist also von der Form

$$P = (I, \tau)$$

mit einer $g \times g$ -Matrix τ . Nach einem weiteren Satz von Riemann ist die Matrix τ symmetrisch und ihr Imaginärteil ist positiv definit. Wir bezeichnen mit Λ_τ das von den Spalten von P aufgespannte Gitter. Identifiziert man $\Omega(C)^*$ mit \mathbb{C}^g über die obige Basis, so wird $H_1(C, \mathbb{Z})$ mit Λ_τ identifiziert. Es ist also

$$\text{Jac}(C) \cong \mathbb{C}^{2g}/\Lambda_\tau.$$

Mit \mathcal{H}_g wird die Menge aller symmetrischer komplexer Matrizen mit positiv definitem Imaginärteil bezeichnet (Siegel'sche Halbebene) und mit J_g die Teilmenge aller diejenigen τ , welche von einer Riemannschen Fläche, versehen mit einer symplektischen Basis, kommen:

Schottkyproblem. Beschreibe die Teilmenge $J_g \subset \mathcal{H}_g$.

2. Polarisierung

Unter einem Divisor D auf einer zusammenhängenden analytischen Mannigfaltigkeit X versteht man eine abgeschlossene analytische Teilmenge, welche in jedem Punkt Kodimension eins hat, zusammen mit einer Vorschrift, welche jeder irreduziblen Komponente eine von 0 verschiedene ganze Zahl zuordnet. Die Menge der Divisoren ist eine additive Gruppe, es ist klar, was $D \geq D'$ bedeutet. Man kann jeder von Null verschiedenen meromorphen Funktion f den Hauptdivisor (f) zuordnen, welcher das Pol- und Nullstellenverhalten beschreibt. Man definiert

$$\mathcal{L}(D) = \{ f; \quad (f) \geq -D \} \cup \{0\}.$$

Dies ist ein Vektorraum. Eine etwas andere Beschreibung geht wie folgt: Man nennt zwei Divisoren D, D' linear äquivalent, wenn $D - D'$ ein Hauptdivisor ist. Man nennt D effektiv, wenn alle auftretenden Multiplizitäten positiv sind. Unter dem linearen System $|D|$ versteht man die Menge aller effektiven zu D linear äquivalenten Divisoren. Man hat eine offensichtliche Bijektion

$$P(\mathcal{L}(D)) := (\mathcal{L}(D) - \{0\})/\mathbb{C}^* \xrightarrow{\sim} |D|, \quad f \mapsto D + (f).$$

Wir nehmen nun an, dass X kompakt ist. Dann ist $\mathcal{L}(D)$ endlich dimensional. Wir betrachten eine Basis f_0, \dots, f_n von $\mathcal{L}(D)$. Dann kann man die Zuordnung

$$a \mapsto [f_0(a) : \dots : f_n(a)] \in P^n(\mathbb{C})$$

für eine gewisse offene Teilmenge X_0 betrachten, in der die rechte Seite sinnvoll erklärt ist. (Man betrachtet in einer kleinen offenen Umgebung von a eine meromorphe Funktion, welche dort auf D paßt und hat dann zu fordern, dass die f_i/φ keine gemeinsame Nullstelle in a haben.) Man nennt f strikt ampel, wenn diese Abbildung überall definiert ist und eine glatte Einbettung von X in den projektiven Raum liefert. Das Bild ist dann algebraisch. Wenn D strikt ampel ist, so sind auch $D, 2D, 3D, \dots$ strikt ampel. Man nennt D ampel, wenn es eine natürliche Zahl r gibt, so dass rD strikt ampel ist.

Eine polarisierte analytische Mannigfaltigkeit ist ein Paar (X, D) bestehend aus einer kompakten analytischen Mannigfaltigkeit und einer linearen Äquivalenzklasse von ampelen Divisoren D . Den Repräsentanten kann man immer effektiv wählen. Man nennt zwei Paare (X, D) und (X', D') isomorph, wenn es eine biholomorphe Abbildung $f : X \rightarrow X'$ gibt, so dass D' und $f(D)$ linear äquivalent sind.

Komplexe Tori sind in der Regel nicht algebraisch und tragen somit in der Regel keine Polarisierung.

3. Zentrale Sätze über Jacobische

Wir betrachten wieder eine kompakte Riemannsche Fläche C und fixieren einen Basispunkt $a \in C$. Sei α_1, \dots, β_g eine Homologiebasis in symplektischer Normalform und sei $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_g)$ die zu $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ duale Basis von $\Omega(C)$. Die Abel-Jacobi-Abbildung

$$u : C \longrightarrow \text{Jac}(C), \quad x \longmapsto \int_a^x \omega,$$

ist unabhängig von der Wahl einer Verbindungskurve von a nach x . Die Abbildung u kann man „aufblasen“ zu einer Abbildung

$$u_d : C^d = C \times \dots \times C \longrightarrow \text{Jac}(C), \quad (x_1, \dots, x_d) \longmapsto u(x_1) + \dots + u(x_d).$$

Da dies von der Reihenfolge der x_i nicht abhängt, ist es sinnvoll, die symmetrische Potenz

$$C^{(d)} = C^d / S_d \longrightarrow \text{Jac}(C)$$

zu betrachten. Ihr Bild sei W_d . Dies ist eine abgeschlossene analytische Teilmenge:

Das Abelsche Theorem kann als Eigenschaft der Abbildung $C^{(d)} \rightarrow \text{Jac}(C)$ formuliert werden. Die Elemente von $C^{(d)}$ kann man in offensichtlicher Weise mit den effektiven Divisoren vom Grad d identifizieren. Zwei Elemente D' haben genau dann dasselbe Bild wie D , wenn es dem linearen System $|D|$ angehört. Dies ist die Aussage des Abelschen Theorems. Wir können also sagen:

3.1 Satz. *Sei $u : C^{(d)} \rightarrow \text{Jac}(C)$ die Abel-Jacobi-Abbildung. Dann gilt*

$$u^{-1}(u(D)) = |D|$$

für alle $D \in C^{(d)}$. Die Abbildung $u = u_d$ ist für $d \leq g$ generisch injektiv.

Da es keine meromorphen Funktionen mit nur einer Null- und Polstelle gibt, folgt als Spezialfall:

3.2 Satz. *Die Abel-Jacobi-Abbildung $u : C \rightarrow \text{Jac}(C)$ ist injektiv.*

Schließlich erwähnen wir noch

3.3 Jacobisches Umkehrtheorem. *Die Abbildung*

$$u : C^{(g)} \longrightarrow \text{Jac}(C)$$

ist surjektiv. Sie ist auf außerhalb einer geeigneten dünnen abgeschlossenen Teilmenge auch injektiv. Die meromorphen Funktionen auf beiden Seiten entsprechen sich umkehrbar eindeutig.

Wir erinnern daran, dass man die Abel-Jacobi-Abbildung $u : C \rightarrow \text{Jac}(C)$ additiv auf Divisoren ausdehnen kann, $u : \text{Div}(C) \rightarrow \text{Jac}(C)$. Die Einschränkung dieser Abbildung auf Divisoren vom Grad 0 hängt offenbar nicht mehr von der Wahl des Basispunktes ab. Wir erinnern an die Bezeichnung $\text{Pic}_0(C)$ für die Gruppe der Divisoren vom Grade 0 modulo linearer Äquivalenz.

3.4 Abelsches Theorem. *Die Abbildung $\text{Div}(C) \rightarrow \text{Jac}(C)$ induziert einen Isomorphismus*

$$\text{Pic}_0(C) \xrightarrow{\sim} \text{Jac}(C).$$

Ein weiterer fundamentaler Satz ist der

3.5 Satz von Torelli. *Zwei kompakte Riemannsche Flächen sind genau dann biholomorph äquivalent, wenn ihre Jacobischen als polarisierte abelsche Varietäten isomorph sind.*

Man kann den Satz von Torelli auch folgendermaßen aussprechen: Sei \mathcal{M}_g der Modulraum der kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht g . Die Periodenabbildung definiert eine injektive Abbildung

$$j : \mathcal{M}_g \rightarrow \mathcal{A}_g.$$

Zur Erinnerung: Das Schottkyproblem handelt um die Beschreibung des Bildes.

4. Die Polarisierung der Jacobischen

Die Kohomologieklassse von C (eingebettet durch die Abel-Jacobi-Abbildung) in $\text{Jac}(X)$ kann man leicht berechnen. Verwendet man in $\Omega(C)^*$ als \mathbb{R} -Basis die Bilder der α_1, \dots, β_g und bezeichnet man die zugehörigen Koordinaten mit x_1, \dots, x_{2g} , so sind die dx_1, \dots, dx_{2g} Differentiale auf $\text{Jac}(X)$ mit der Eigenschaft

$$\left(\int_C dx_i \wedge dx_j \right)_{1 \leq i, j \leq 2g} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine Linearform auf dem Raum der Zweiformen auf X . Der Raum dieser Linearformen ist per Poincaré-Dualität isomorph zum Raum der $(g-2)$ -Formen. Die obiger Linearform zugeordnete $(g-2)$ -Form ist definitionsgemäß die Kohomologieklassse (des Bildes) von C . Diese ist also $\sum_{i=1}^g \alpha_i$, wobei α_i aus $(dx_1 \wedge dy_1) \wedge \dots \wedge (dx_g \wedge dy_g)$ durch Streichen des Eintrags $dx_i \wedge dy_i$ entsteht. Ein Verallgemeinerung hiervon besagt:

4.1 Bemerkung. Die Kohomologieklassse von $W_d = u(C^{(d)})$ wird repräsentiert durch

$$\frac{1}{(g-d)!} \left(\sum_{i=1}^g dx_i \wedge dy_i \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^g dx_i \wedge dy_i \right), \quad (g-d)\text{-fach.}$$

Beweis. Man kann zum Beweis die Kurve C durch einen kohomologen Zykel C' ersetzen. Daher kann man annehmen, dass $\text{Jac}(X) = E^g$ ein Produkt von elliptischen Kurven ist und dass C' die Summe der g Kurven ist, die man erhält, wenn man in E^g alle Faktoren bis auf einen durch den Nullpunkt ersetzt. \square

Der Divisor W_{g-1} spielt eine fundamentale Rolle. Man kann das d -fache Schnittprodukt mit sich selbst betrachten. Die Kohomologieklassse dieses Schnittprodukts ist wohldefiniert. Das Schnittprodukt stimmt auf kohomologischer Ebene mit dem Cup-Produkt überein. Wir erhalten somit:

4.2 Satz. Die Kohomologieklassse des $(g-d)$ -fachen Schnittprodukts von W_{g-1} mit sich selbst ist gleich $(g-d)![W_d]$, wobei $[W_d]$ die Kohomologieklassse von W_d bezeichne. Insbesondere gilt:

Die Kohomologieklassse des $(g-1)$ -fachen Schnittprodukts von W_{g-1} mit sich selbst ist $(g-1)![C]$.

Folgerung. Die Schnittzahl von W_{g-1} mit C ist g .

Hieraus folgt mit Hilfe des Riemann-Rochschen Satzes für abelsche Varietäten:

4.3 Satz. Die Teilmenge $W_{g-1} \subset \text{Jac}(C)$ ist eine irreduzible abgeschlossene analytische Teilmenge der Kodimension Eins. Faßt man sie als Divisor (mit Multiplizität Eins) auf, so gilt:

- a) Das g -fache Schnittprodukt von W_{g-1} mit sich selbst ist $g!$.
- b) $\dim \mathcal{L}(W_{g-1}) = 1$.
- c) W_{g-1} ist ampel.

Allgemein heißt eine polarisierte abelsche Varietät (X, D) *hauptpolarisiert*, falls $\dim \mathcal{L}(D) = 1$ ist. Wir können also feststellen, dass die Jacobischen hauptpolarisiert sind.

Ist D ein effektiver Divisor mit der Eigenschaft $\dim \mathcal{L}(D) = 1$, so stimmt jeder linear äquivalente effektive Divisor mit D überein. Es gilt also:

4.4 Bemerkung. Seien (X, D) und (X', D') zwei isomorphe hauptpolarisierte abelsche Varietäten. Die Repräsentanten D und D' seien effektiv gewählt. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung $f : X \rightarrow X'$ mit der Eigenschaft $f(D) = D'$.

Holomorphe Abbildungen zwischen abelschen Varietäten setzen sich immer aus Homomorphismen und Translationen zusammen. Wir geben nun eine ganz andere Konstruktion für die Polarisierung einer Jacobischen. Diese hat den Vorteil, dass sie nicht nur für Jacobische, sondern allgemeiner für Tori \mathbb{C}^g/L_τ funktioniert, wobei τ ein Punkt in der Siegelschen Halbebene ist. Man kann dann die Thetafunktion

$$\vartheta(z) = \vartheta(z, \tau) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i \{ p' \tau p + 2p' z \}$$

betrachten. Aus der Tatsache, dass der Imaginärteil von τ positiv definit ist, kann man leicht schließen, dass die Reihe konvergiert. Außerdem ist sie quasiperiodisch, d.h. $\vartheta(z)$ und $\vartheta(z + \xi)$ unterscheiden sich für Gittervektoren $\xi \in L_\tau$ nur um einen von 0 verschiedenen (elementaren) Faktor:

$$\vartheta(z + n + \tau m, \tau) = \exp \pi i (-m' \tau m - 2m' z) \vartheta(z, \tau).$$

Die Nullstellenmenge D definiert somit eine abgeschlossene analytische Teilmenge des Torus \mathbb{C}^g/L_τ . Die kohomologischen Eigenschaften dieses Divisors können alle aus dem Faktor

$$\exp \pi i (-m' \tau m - 2m' z) \quad (L \times \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}^*)$$

berechnet werden. Insbesondere kann man die Chernklasse ausrechnen. Es stellt sich heraus, dass dieser Divisor eine Hauptpolarisierung definiert. Es läßt sich sogar zeigen, dass jede hauptpolarisierte abelsche Varietät isomorph zu einer so konstruierten ist. Der Punkt τ ist eindeutig bestimmt bis auf die Aktion der symplektischen Modulgruppe $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$,

$$\tau \mapsto (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}).$$

Bezeichnet man also mit \mathcal{A}_g die Menge der Isomorphieklassen hauptpolarisierter abelscher Varietäten, so hat man die Identifikation

$$\mathcal{A}_g \cong \mathcal{H}_g / \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}).$$

Jetzt nehmen wir an, dass τ von einer kompakten Riemannschen Fläche kommt. Man kann vermuten, dass zwischen W_{g-1} und dem Nullstellendivisor (ϑ) von $\vartheta(z)$ ein Zusammenhang besteht. Gleichheit ist sicherlich zu viel verlangt. Das liegt daran, dass bei der Definition der Abel-Jacobi Abbildung $C \rightarrow \mathrm{Jac}(C)$ ein Basispunkt gewählt werden mußte. Eine Veränderung des Basispunktes bewirkt eine Translation. Man kann also allenfalls erwarten, dass $D = (\vartheta)$ ein Translat von $D' = W_{g-1}$ ist. Dies ist tatsächlich richtig: Aus der Berechnung der Chernklassen folgt, dass der Divisor $D' - D$ kohomologisch trivial ist. Daher liegt ein Vielfaches in der Picardvarietät $\mathrm{Pic}^0(X)$. Aus der Tatsache, dass D und D' Hauptpolarisierungen sind, kann man schließen, dass $D - D'$ schon selbst in der Picard-Varietät liegt. Da D ampel ist, ist jedes Element von $\mathrm{Pic}^0(X)$ von der Form $D_a - D$. Es folgt $D' - D = D_a - D$ und daher $D' = D_a$.

4.5 Satz. *Kommt τ von einer kompakten Riemannschen Fläche C , so ist der Nullstellendivisor (ϑ) der Thetareihe ein Translat von W_{g-1} .*

Wir wollen die Translate von W_{g-1} etwas invarianter beschreiben. Sei nun D ein fest gewählter Divisor vom Grad d auf C . Dann kann man die Abbildung

$$C^d \longrightarrow \text{Jac}(C), \quad (x_1, \dots, x_d) \longmapsto u(x_1 + \dots + x_d - D)$$

betrachten. Sie ist unabhängig von der Wahl des Basispunktes. Ihr Bild ist offenbar ein Translat von W_d . Speziell im Falle $d = g - 1$, Grad $D = g - 1$, bezeichnen wir es mit $\Theta(D)$. Dies ist also ein Translat von D , welches nur von der Klasse von D abhängt. Der Vorteil ist, dass $\Theta(D)$ unabhängig vom Basispunkt definiert ist.

Eine Besonderheit des Divisors (ϑ) ist seine Symmetrie unter Abbildung $z \mapsto -z$. Wir wollen die symmetrischen Translate $\Theta(D)$ genau beschreiben. Dazu erinnern wir daran, dass ein Divisor K auf C kanonisch heißt, wenn er der Divisor eines meromorphen Differential ist. Es gibt genau eine kanonische Divisorenklasse. Ihr Grad ist $2g - 2$. Ein Divisor D auf C heißt Thetadivisor, falls $2D$ kanonisch ist. Man kann zeigen, dass ein Thetadivisor existiert. Als Folge hiervon existieren genau 2^{2g} Thetadivisorenklassen. Ihre Grade sind $g-1$.

4.6 Satz. *Es gibt genau 2^{2g} symmetrische Translate von W_{g-1} . Sie sind von der Form $\Theta(D)$, wobei D die 2^{2g} Klassen von Thetadivisoren durchläuft.*

Die symmetrischen Translate von (ϑ) kann man leicht beschreiben:

4.7 Bemerkung. *Die symmetrischen Translate von (ϑ) sind genau die Nullstellendivisoren von $\vartheta(z + a)$, wobei a ein Repräsentensystem von $(\frac{1}{2}L)/L$ durchläuft.*

Die symmetrischen Translate sind untereinander gleichberechtigt. Man zeichnet häufig einen aus und bezeichnet ihn mit Θ .

5. Durchschnitte von Translaten des Thetadivisors

Beim Schneiden von Divisoren bereiten die Singularitäten Probleme. Über die Singularitäten des Thetadivisors hat man genaue Informationen. Zunächst einmal betrachtet man die Abbildung $C^{g-1} \rightarrow C^g$, welche zu einem effektiven Divisor vom Grad $g - 1$ den Basispunkt $a \in C$ hinzuaddiert. Es ist klar, dass das Bild von $C^{(g-1)}$ in C^g glatt ist. Der Niederblasungsort der Jacobi-Abbildung $C^g \rightarrow \text{Jac}(C)$ ist die kleinste abgeschlossene analytische Teilmenge von $\text{Jac}(C)$, so dass die Einschränkung der Jacobi-Abbildung auf das Komplement des Urbilds injektiv ist. Die Singularitäten von W_{g-1} sind also im Niederblasungsort enthalten. Den Niederblasungsort kann man nach dem Abelschen Theorem beschreiben: Er ist das Bild aller Divisoren $D \in C^g$, so dass $|D|$ positive Dimension hat (spezielle Divisoren).

5.1 Satz. *Für die Dimension des singulären Orts eines Thetadivisors gilt:*

$$g - 4 \leq \dim \text{Sing}(\Theta) \leq g - 3.$$

Man weiß, dass die Thetadivisoren generischer abelscher Varietäten glatt sind. Dadurch eröffnet 5.1 einen Zugang zum Schottkyproblem. Der „Andreotti-Mayer-Ort“ in \mathcal{A}_g besteht aus allen hauptpolarisierten abelschen Varietäten, so dass $g - 4 \leq \dim \text{Sing}(\Theta)$ gilt. Man weiß, dass der Abschluss des Schottkyorts eine irreduzible Komponente des Andreotti-Mayer-Orts ist. Es gibt weitere Komponenten, über deren genaue Position es Vermutungen gibt:

Eine Verfeinerung obiger Betrachtungen liefert:

5.2 Satz. *Sei C „generisch“. Seien $\Theta_\alpha, \Theta_\beta$ zwei verschiedene Translate des Thetadivisors, wobei $\alpha - \beta$ im Bild von C liegen möge. Dann gibt es eine offene und dichte Teilmenge des Durchschnitts, so dass für jeden Punkt a dieser Teilmenge gilt:*

- a) a ist glatter Punkt von Θ_α und Θ_β .
- a) Θ_α und Θ_β schneiden sich in diesem Punkt transversal.

Ist $a \in C$ ein Punkt der Riemannschen Fläche, so gilt

$$a + W_{g-2} \subset W_{g-1}.$$

(Wir identifizieren der Einfachheit halber $a \in C$ mit $u(a) \in \text{Jac}(C)$.) Wenn C nicht hyperelliptisch ist, kann man mehr zeigen, nämlich

$$C = \{ a \in J(X); \quad a + W_{g-2} \subset W_{g-1} \}.$$

Man kann also C aus W_{g-2} und W_{g-1} rekonstruieren. Zum Beweis des Satzes von Torelli muss man wenigstens ein Translat von W_{g-2} aus der Kenntnis der Polarisierung (ein Translat von W_{g-1}) rekonstruieren.

Im folgenden benötigen wir eine Filtrierung von W_d :

$$W_d^r = \{ u(D) \in W_d; \quad \dim |D| \geq r \quad (D \in C^{(d)}) \}.$$

Dies sind abgeschlossene analytische Teilmengen von $\text{Jac}(C)$.

5.3 Satz. *Seien p, q zwei Punkte aus der Riemannschen Fläche C . Der Durchschnitt von W_{g-1} mit dem Translat $W_{g-1} + p - q$ besteht aus zwei irreduziblen Komponenten der Dimension $g - 2$:*

$$W_{g-1} \cap (W_{g-1} + p - q) = (W_{g-2} + p) \cup (W_g^1 - q).$$

Beweis. Wir benötigen nur die Inklusion „ \subset “. Sei D ein effektiver Divisor vom Grad $g-1$, so dass das Bild $u(D)$ von D unter der Abel-Jacobi Abbildung auch in $W_{g-1} + p - q$ enthalten ist. Der Divisor $D + (q)$ ist dann nach dem Abelschen Theorem linear äquivalent zu einem effektiven Divisor D' mit $D' > (p)$. Wir nehmen an, dass er nicht in W_g^1 enthalten ist. Dann folgt $D' = D + (q)$. Insbesondere gilt $D > (p)$ und daher $u(D) \in W_{g-2} + p$. \square

Uns interessiert eine schwächere Form dieser Zerlegung:

5.4 Satz. *Seien p, q, r, s Punkte aus C . Dann gilt*

$$W_{g-1} \cap (W_{g-1} + p - q) \subset (W_{g-1} + p - r) \cup (W_{g-1} + s - q).$$

Zum Beweis ist zweierlei zu zeigen:

a) $W_{g-2} \subset W_{g-1} - q$.

Dies ist trivial wegen $W_{g-2} + q \subset W_{g-1}$.

b) $W_g^1 \subset W_{g-1} + s$.

Sei $D = a_1 + \cdots + a_g \in W_g^1$. Wenn s in D vorkommt, ist die Behauptung klar. Andernfalls wählt man ein linear äquivalentes $D' = a'_1 + \cdots + a'_p$. Es existiert eine nicht konstante meromorphe Funktion f mit $(f) = D' - D$. Da s kein Pol von f ist, kann man eine Konstante c abziehen, so dass die neue Funktion $g = f - c$ in s verschwindet. Der Divisor $(g) + D$ ist effektiv und enthält s . Damit ist man auf den ersten Fall zurückgeführt. \square

In der Formel 5.4 kann man natürlich W_{g-1} durch ein Translat ersetzen, beispielsweise durch $\Theta_q := \Theta + q$. Man erhält dann $\Theta_q \cap \Theta_p \subset \Theta_{p+q-r} \cup \Theta_s$ oder in leicht veränderter Schreibweise:

5.5 Satz. *Seien α, β, γ aus C . Dann gilt*

$$\Theta_\beta \cap \Theta_\gamma \subset \Theta_\alpha \cup \Theta_{-\alpha-x} \quad \text{für } x \in C - \alpha - \beta - \gamma.$$

6. Eine Thetarelation auf Jacobischen

Wir müssen Divisoren der Form $\Theta_{a_1} + \cdots + \Theta_{a_n}$ betrachten. Die Schnitte der zugehörigen Geradenbündel sind meromorphe Funktionen auf X mit der Eigenschaft $(f) + \Theta_{a_1} + \cdots + \Theta_{a_n} \geq 0$. Man kann dies analytisch wie folgt etwas anders interpretieren. Sei $\vartheta(z)$ die Riemannsche Thetafunktion auf \mathbb{C}^g . Man kann f auf \mathbb{C}^g zurückziehen und erhält eine abelsche Funktion, die wir wieder mit f bezeichnen. Multipliziert man diese mit $\vartheta(z - a_1) \cdots + \vartheta(z - a_n)$,

so erhält man eine holomorphe Funktion F , welche sich genauso transformiert (unter dem Periodengitter). wie $\vartheta(z - a_1) \cdots \vartheta(z - a_n)$. Wir erhalten somit:

Die Schnitte des zu $\Theta_{a_1} + \cdots + \Theta_{a_n}$ gehörigen Geradenbündels entsprechen holomorphen Funktionen auf \mathbb{C}^g , welche sich genauso so transformieren wie $\vartheta(z - a_1) \cdots \vartheta(z - a_n)$.

Wenn man sich das Transformationsverhalten der Thetafunktion anschaut, so sieht man, dass dieses nur von dem Paar $(n, a_1 + \cdots + a_n)$ abhängt. Wir erhalten also insbesondere, dass die Räume

$$H^0(X, \mathcal{L}(\Theta_\alpha + \Theta_{-\alpha+\beta}))$$

bei festem β aber variablem α miteinander identifiziert werden können. Wegen der Endlichdimensionalität muß es allgemein auf hauptpolarisierten abelschen Varietäten nicht triviale Relationen der Art

$$\sum_{i=1}^n c_i \vartheta(z - \alpha_i) \vartheta(z + \alpha_i - \beta) = 0$$

geben, wenn n genügend groß ist. Wir wollen nun zeigen, dass im Falle Jacobischer solche Relationen schon für $n = 3$ existieren.

6.1 Satz. *Seien α, β, γ aus C und $x \in C - \alpha - \beta - \gamma$. Dann existieren Konstanten c, d mit der Eigenschaft*

$$\vartheta(z - \alpha) \vartheta(z + \alpha + x) = c \vartheta(z - \beta) \vartheta(z + \beta + x) + d \vartheta(z - \gamma) \vartheta(z + \gamma + x).$$

Beweis. Wir wissen aus Satz 5.5, dass $\vartheta(z - \alpha) \vartheta(z + \alpha + x)$ auf $\Theta_\beta \cap \Theta_\gamma$ verschwindet. Dasselbe gilt für $\vartheta(z - \gamma) \vartheta(z + \gamma + x)$, da diese Funktion sogar auf Θ_γ verschwindet. Hieraus muss geschlossen werden, dass die Einschränkungen der beiden Funktionen auf Θ_β proportional sind. Dies kann man so ausdrücken:

Man schränkt das Geradenbündel $\mathcal{L}(\Theta_\alpha + \Theta_{-\alpha-x})$ ein auf die irreduzible Varietät Θ_β . Der Raum der Schnitte, welche auf $\Theta_\beta \cap \Theta_\gamma$ verschwinden, ist eindimensional.

Um dies zu zeigen, betrachten wir die Einschränkung s von $\vartheta(z - \gamma)$ auf Θ_β . Wir nutzen jetzt aus, dass sich Θ_β und Θ_γ „sauber“ schneiden.

Hier entsteht eine Lücke: Wir werden 5.2 benutzen und dieses Resultat gilt leider nur generisch. Mumford behauptet zwar in Tata-Theta II in 3.215, dass 5.2 generell richtig ist und deutet in 3.217f einen Beweis an. Marini hat ein Gegenbeispiel angegeben, die Aussage ist für hyperelliptisches C falsch. Diese Lücke scheint bereits in der Arbeit von Arbarello und de-Concini aufzutreten. Marini versucht diese Lücke zu schließen, indem er behauptet, dass die Inklusion 5.5 schematisch gilt. Er gibt jedoch kein stichhaltiges Argument dafür an.

Wir nehmen nun 5.2 an. Dann kann man einen beliebigen Schnitt von $\mathcal{L}(\Theta_\alpha + \Theta_{-\alpha-x})|_{\Theta_\beta}$, welcher auf $\Theta_\beta \cap \Theta_\gamma$ durch s teilen und erhält einen Schnitt aus

$$\mathcal{L}(\Theta_\alpha + \Theta_{-\alpha-x} - \Theta_\gamma)|_{\Theta_\beta} = \mathcal{L}(\Theta_{-\gamma-x})|_{\Theta_\beta}.$$

Es ist also zu zeigen, dass dieser Raum eindimensional ist. Da der Raum der Schnitte von $\mathcal{L}(\Theta_{-\gamma-x})$ auf ganz $\text{Jac}(C)$ eindimensional ist (Hauptpolarisationseigenschaft), ist zu zeigen, dass jeder Schnitt von $\mathcal{L}(\Theta_{-\gamma-x})|_{\Theta_\beta}$ auf ganz $\text{Jac}(C)$ fortgesetzt werden kann. Das Hindernis für die Fortsetzung liegt in in der ersten Kohomologiegruppe der Idealgarbe von Θ_β . Hierbei wird die Kohomologiesequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Jac}(C)}(\Theta_\beta) \longrightarrow \mathcal{L}(\Theta_{-\gamma-x}) \longrightarrow \mathcal{L}(\Theta_{-\gamma-x})|_{\Theta_\beta} \rightarrow 0$$

verwandt. Die besagte Kohomologiegruppe ist dual zu zu

$$H^{g-1}(\text{Jac}(C), \mathcal{L}(\Theta_\beta)).$$

Da $\mathcal{L}(\Theta_\beta)$ ampel ist und da das kanonische Bündel trivial ist, verschwindet diese nach dem Kodairaschen Verschwindungssatz.

Wir haben nun gezeigt, dass eine Konstante d existiert, so dass

$$\vartheta(z - \alpha)\vartheta(z + \alpha + x) - d\vartheta(z - \gamma)\vartheta(z + \gamma + x)$$

auf Θ_β verschwindet. Jetzt kann man durch $\vartheta(z - \beta)$ teilen und eine Wiederholung des letzten Schlusses liefert 6.1.

7. Trisekanten

Es gibt eine sehr schöne geometrische Formulierung von 6.1, die wir nun ansteuern. Sie fängt mit der Kummervarietät

$$K(X) := X/\pm$$

zusammen. Dabei sei zunächst X eine beliebige hauptpolarisierte abelsche Varietät. Diese hängt zusammen mit dem Doppelten des Thetadivisors. Man weiß

$$\dim H^0(X, \mathcal{L}(2\Theta)) = N = 2^{g-1}.$$

Man kann diese Schnitte wie folgt konstruieren. Zunächst betrachtet man milde Verschiebungen der Riemannschen Thetafunktion:

$$\vartheta[n](z, \tau) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^g + n} \exp \pi i(p' \tau p + 2p' z), \quad n \in \frac{1}{2} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}.$$

Man rechnet sofort nach:

- a) Dieses System von 2^g Funktionen ist linear unabhängig.
- b) $\hat{\vartheta}[n](z, \tau) := \vartheta[n](2z, 2\tau)$ transformiert sich wie $\vartheta(z, \tau)^2$.
- c) Sie bilden eine Basis von $H^0(X, \mathcal{L}(2\Theta))$.
- d) Diese Thetafunktionen haben keine gemeinsame Nullstelle.
- e) Sie sind alle symmetrisch $\hat{\vartheta}[n](z, \tau) = \hat{\vartheta}[n](-z, \tau)$. Insbesondere definiert 2Θ eine holomorphe Abbildung

$$K(X) \longrightarrow P^{N-1}(\mathbb{C}) \quad (N = 2^g - 1).$$

7.1 Satz. Die durch das Tupel

$$\vec{\vartheta} := (\dots \hat{\vartheta}[n](z, \tau) \dots)$$

definierte Abbildung

$$K(X) \longrightarrow P^N(\mathbb{C}) \quad (N = 2^g - 1)$$

ist eine Einbettung.

Wir wissen, dass auch die Funktion $\vartheta(z + \zeta)\vartheta(z - \zeta)$ sich als Funktion von z wie $\vartheta^2(z)$ transformiert. Insbesondere muss sich diese Funktion als Linearkombination der $\hat{\vartheta}[n]$ schreiben lassen.

7.2 Satz (Riemann). Es gilt

$$\vartheta(z + \zeta)\vartheta(z - \zeta) = \sum_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g / \mathbb{Z}^g} \hat{\vartheta}[n](z)\hat{\vartheta}[n](\zeta).$$

Wir bilden nun den Ausdruck

$$\sum_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g / \mathbb{Z}^g} \left[\hat{\vartheta}[n](\zeta + \alpha) - c\hat{\vartheta}[n](\zeta + \beta) - d\hat{\vartheta}[n](\zeta + \gamma) \right] \hat{\vartheta}[n](z + \zeta).$$

Setzt man dreimal die Formel 7.2 ein, so sieht man, dass dieser Ausdruck wegen 6.1 gleich Null ist, wenn $2\zeta = x$ gilt. Da die Thetafunktionen $\hat{\vartheta}[n](z)$ linear unabhängig sind, folgt hieraus

$$\hat{\vartheta}[n](\zeta + \alpha) - c\hat{\vartheta}[n](\zeta + \beta) - d\hat{\vartheta}[n](\zeta + \gamma) = 0.$$

Die drei Vektoren

$$\vec{\vartheta}(\zeta + \alpha), \quad \vec{\vartheta}(\zeta + \beta), \quad \vec{\vartheta}(\zeta + \gamma)$$

sind also linear abhängig. Die entsprechenden Punkt des projektiven Raumes liegen also auf einer Geraden. Damit erhalten wir folgende geometrische Version von 6.1.

7.3 Fay's Trisekantensatz. Seien α, β, γ drei Punkte einer kompakten Riemannschen Fläche C und sei

$$\zeta \in \frac{1}{2}(C - \alpha - \beta - \gamma) \quad (\in \text{Jac}(C)).$$

Dann sind die Punkte

$$[\vec{\vartheta}(\zeta + \alpha)], \quad [\vec{\vartheta}(\zeta + \beta)], \quad [\vec{\vartheta}(\zeta + \gamma)]$$

kolinear in $P^N(\mathbb{C})$.

Betrachtet man auf der Kummervarietät $K(X) \subset P^N(\mathbb{C})$ zwei Punkte und verbindet sie durch eine Gerade, so wird diese Gerade in der Regel die Kummervarietät in keinem weiteren Punkt treffen. „Trisekanten“, also Geraden, welche $K(X)$ in drei Punkten treffen, sollten ein Ausnahmephänomen sein. Der Trisekantensatz sagt aus, dass die Kummervarietät einer Jacobischen ganze Büschel von Trisekanten besitzt. Wir werden sehen, dass sich Jacobische durch Eigenschaften dieser Art beschreiben lassen.

8. Die KP-Gleichungen

Wenn man im Trisekantensatz die Punkte α, β, γ zusammenlaufen läßt, so erhält man ein System von Differentialgleichungen, eine „Hierarchie“ von Differentialgleichungen. Wir wollen sie in den Basispunkt $a \in C$ der Kurve zusammenlaufen lassen, welcher dem Nullpunkt in der Jacobischen $\text{Jac}(C)$ entspricht. Dazu müssen wir eine Karte $U \rightarrow C$, $0 \mapsto a$, der Kurve um den Basispunkt betrachten. Dabei ist $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung des Nullpunkts. Diese Karte kann man zu einer holomorphen Abbildung

$$U \longrightarrow \mathbb{C}^g, \quad 0 \longmapsto 0,$$

hochheben. Sie gestattet eine Potenzreihenentwicklung

$$\mu(\epsilon) = D_1\epsilon + D_2\epsilon^2 + \cdots \quad (D_1 \neq 0).$$

Man nimmt nun in der Trisekantengleichung

$$\alpha = 0, \quad \beta = \mu(t), \quad \gamma = \mu(s), \quad \zeta = \frac{1}{2}(\mu(\epsilon) - \mu(t) - \mu(s))$$

mit unabhängigen Parametern ϵ, t, s . (Vorsicht: Wir betrachten jetzt C als Kurve in \mathbb{C}^g . Der Basispunkt a ist nun der Nullpunkt.) Jetzt lassen wir in der Trisekantengleichung t und s gegen Null laufen, während ϵ als Parameter verbleibt. Dazu benutzt man folgende Taylorformel:

Ist f eine analytische Funktion auf \mathbb{C}^g , so hat die Taylorentwicklung von $f(\mu(\epsilon))$ hat die Form

$$f(\epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \dots) = \sum_{i=0}^{\infty} (\Delta_i f)(0) \epsilon^i.$$

Dabei sind Δ_i explizit angebbare Differentialoperatoren

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = D_1, \quad \Delta_2 = \frac{1}{2} D_1^2 + D_2, \quad \dots$$

Man erhält nach nach einer elementaren Rechnung eine differentielle Form der Trisekantengleichung:

Die drei Vektoren

$$\vec{\vartheta}(\mu(\epsilon)), \quad D_1(\vec{\vartheta})(\mu(\epsilon)), \quad (D_1^2 + D_2)(\vec{\vartheta})(\mu(\epsilon))$$

liegen auf einer Geraden.

Dabei werden D_1, D_2 als Differentialoperatoren nach folgendem Schema aufgefaßt:

$$Af := \sum_{i=1}^g A_i \frac{\partial f}{\partial z_i}.$$

(Man identifiziert also \mathbb{C}^g mit der Liealgebra von $\text{Jac}(X)$.)

Wegen der linearen Abhängigkeit gibt es Potenzreihen $d, b, c \in \mathbb{C}\{\epsilon\}$ mit der Eigenschaft

$$d(\epsilon)\vec{\vartheta}(\mu(\epsilon)) + c(\epsilon)(D_1\vec{\vartheta})(\mu(\epsilon)) + b(\epsilon)((D_1^2 + D_2)\vec{\vartheta})(\mu(\epsilon)) = 0.$$

Wir werten diese Gleichung im Nullpunkt aus und verwenden dann:

8.1 Satz von Wirtinger. *Sei τ in der Siegelschen Halbebene. Die Vektoren*

$$\vec{\vartheta}(0), \quad (\partial_i \partial_j \vec{\vartheta})(0) \quad (1 \leq i < j \leq g)$$

sind linear unabhängig.

Wir übergehen den elementaren Beweis. □

Da die Funktionen $\vec{\vartheta}$ gerade sind, gilt $D_1\vec{\vartheta}(0) = D_2\vec{\vartheta}(0) = 0$. Hieraus und dem Satz von Wirtinger kann man $d_0 = b_0 = 0$ folgern: Wir können annehmen, dass c_0 von Null verschieden ist, da man sonst a, b, c durch eine gemeinsame Potenz von ϵ teilen könnte. Daher können wir $c = 1$ annehmen. Nochmalige Anwendung des Satzes von Wirtinger liefert

$$d_0 = d_1 = d_2 = 0, \quad b_0 = b_2 = 0, \quad b_1 = -1.$$

Nach einem Koordinatenwechsel $\tilde{\epsilon} = b(\epsilon)$ können wir $b = 1$ annehmen. Wir erhalten die vereinfachte Form

$$\left(\sum_{i=3}^{\infty} d_i \epsilon^i \right) \vec{\vartheta}(\mu(\epsilon)) + (D_1\vec{\vartheta})(\mu(\epsilon)) - ((D_1^2 + D_2)\vec{\vartheta})(\mu(\epsilon)) = 0.$$

Dies Formel kann man auf die Taylorkoeffizienten von $\vec{\vartheta}$ umschreiben. Man erhält:

8.2 Satz. *Für jedes $m \geq 3$ gilt*

$$\left[\Delta_m D_1 - \Delta_{m-1}(D_2 + D_1^2) + \sum_{i=3}^m d_i \Delta_{m-1} \right] \vec{\vartheta}(0) = 0.$$

Dies sind Gleichungen zwischen den Nullwerten von $\vec{\vartheta}$ und von partiellen Ableitungen. Man kann sie mittels 7.2 auch umschreiben in richtige Differentialgleichungen der Riemannschen Thetafunktion ϑ selbst:

8.3 Satz. *Für beliebiges $z \in \mathbb{C}^g$ gilt*

$$\left[\Delta_m D_1 - \Delta_{m-1}(D_2 + D_1^2) + \sum_{i=3}^m d_i \Delta_{m-1} \right] (\vartheta(z + \zeta) \vartheta(z - \zeta)) \Big|_{\zeta=0}$$

Dabei werden die Differentialoperatoren of die Variable ζ angewandt.

9. Das Kriterium von Matsusaka

Unter einem Zykel Z der Dimension d auf einer glatten zusammenhängenden algebraischen Mannigfaltigkeit der Dimension n versteht man eine formale endliche \mathbb{Z} -Linearkombination von irreduziblen Teilvarietäten der Dimension d . Zyklen der Dimension $n - 1$ sind also Divisoren. Es gibt einen Begriff der linearen Äquivalenz von Zykeln, der den bereits eingeführten Begriff der linearen Äquivalenz von Divisoren verallgemeinert. Man sagt zunächst, dass zwei Zyklen Z, Z' rational verbindbar sind, wenn es eine durch einen Zariski offenen Teil $U \subset P^1(\mathbb{C})$ parametrisierte algebraische Familie von Zykeln Z_t gibt, in welcher Z und Z' beide vorkommen. Allgemein heißen dann zwei Zyklen Z, Z' linear äquivalent, wenn es eine Kette $Z = Z_1, \dots, Z_m = Z'$ von Zykeln gibt, in welcher je zwei aufeinander folgende rational verbindbar sind.

Läßt man anstelle von $U \subset P^1(\mathbb{C})$ beliebige zusammenhängende algebraische Varietäten zu, so gelangt zu dem Begriff der algebraischen Äquivalenz. Diese ist sehr viel größer. Beispielsweise sind zwei Divisoren auf einer kompakten Riemannschen Fläche genau dann algebraisch äquivalent, wenn sie denselben Grad haben. Auf einer abelschen Varietät sind zwei Divisoren genau dann algebraisch äquivalent, wenn ihre Chernschen Klassen gleich sind.

Der Grad eines nulldimensionalen Zyklus ist naheliegenderweise definiert. Er ist für algebraisch äquivalente Zyklen gleich.

Das Schnittprodukt $Z \cdot Z'$ zweier linearer Zyklenklassen der Dimensionen $0 < d, d' < n$ ist eine wohldefinierte (lineare) Zyklenklasse. Wenn Z und Z'

komplementäre Dimensionen haben, so ist $Z \cdot Z'$ eine Klasse von nulldimensionalen Zyklen. Ihr Grad ist die Schnittzahl von Z mit Z' . Zwei Zyklen Z, Z' gleicher Dimension heißen numerisch äquivalent, falls die Schnittzahlen ZY und $Z'Y$ für jeden Zykel komplementärer Dimension gleich sind. Algebraisch äquivalente Divisoren sind numerisch äquivalent.

Die Gruppe $\text{Chow}_0^0(X)$ ist die Gruppe der nulldimensionalen Zyklen vom Grad 0 modulo linearer Äquivalenz. Ist X eine abelsche Varietät, so kann man jedem nulldimensionalen Zyklus Z durch Aufsummieren ein Element $S(Z)$ von X zuordnen. Dieses hängt nur von der linearen Äquivalenzklasse von Z ab. Insbesondere hat man eine natürliche Abbildung

$$S : \text{Chow}_0^0(X) \longrightarrow X \quad (\text{Summieren}).$$

Seien nun Z, Y zwei Zyklen komplementärer Dimension auf einer abelschen Varietät. Man kann dann für jeden Punkt $a \in X$ den verschobenen Zykel $Y_a = a + Y$ betrachten und mit Z zum Schnitt bringen. Man erhält so eine Abbildung

$$X \longrightarrow X, \quad a \longmapsto S(Z \cdot Y_a).$$

Jede holomorphe Abbildung einer abelschen Varietät in sich ist die Zusammensetzung einer Translation und eines Homomorphismus. Wir erhalten also, dass

$$\alpha(Z, Y) : X \longrightarrow X, \quad a \longmapsto S(Z \cdot (Y_a - Y)),$$

ein Homomorphismus ist. Dies bedeutet $\alpha(Z, Y_b) = \alpha(Z, Y)$ für beliebiges $b \in A$. Wir benutzen noch die triviale Formel

$$S(Z) = S(Z_a) + \text{Grad}(Z) a$$

für nulldimensional Zykel Z . Da in obiger Situation der Grad von $Z \cdot (Y_a - Y)$ gleich Null ist, folgt nun $\alpha(Z_a, Y_b) = \alpha(Z, Y)$. Hieraus folgern wir eine merkwürdige Symmetrierelation der Abbildung α :

9.1 Hilfssatz. *Es gilt*

$$(\alpha(Z, Y) + \alpha(Y, Z))(a) = I(Y, Z)a.$$

Dabei sei $I(Y, Z) = \text{Grad}(Y \cdot Z)$ die Schnittzahl.

Eine Verallgemeinerung der Relation $\alpha(Z_a, Y_b) = \alpha(Z, Y)$ besagt:

9.2 Hilfssatz. *Die Abbildung $\alpha(Z, Y)$ hängt nur von den algebraischen Äquivalenzklassen von Z und Y ab.*

(Ein tieferes Resultat besagt, dass $\alpha(Z, Y)$ nur von den numerischen Äquivalenzklassen von Z und Y abhängt.)

Beweis. Sei beispielsweise Z_t eine algebraische Familie, parametrisiert durch die Varietät T . Man kann dann für ein festes t_0 die Abbildung

$$T \times X \longrightarrow X, \quad (t, x) \longmapsto \alpha(Z_t, Y) - \alpha(Z_{t_0}, Y)$$

betrachten. Diese Abbildung ist konstant auf $(T \times \{0\}) \cup (\{t_0\} \times X)$. Die Behauptung folgt dann aus dem sogenannten *Rigiditätslemma* der algebraischen Geometrie:

Seien X, Y, Z algebraische Varietäten und sei $f : X \times Y \rightarrow Z$ ein Morphismus. X oder Y sei vollständig. Es mögen Punkte $x \in X$ und $y \in Y$ existieren, so dass f auf der Vereinigung von $\{x\} \times Y$ und $X \times \{y\}$ konstant ist. Dann ist f konstant.

Wir nehmen nun an, dass $Z = D^r$ und $Y = D^{g-r}$ mit einem Divisor D gilt. Dann läßt sich 9.1 wie folgt verschärfen:

9.3 Hilfssatz. *Ist D ein Divisor, so gilt*

$$\alpha(D^r, D^{g-r}) = \frac{g-r}{g} \text{Grad}(D^g) \text{ id.}$$

Beweis. Der Beweisgedanke tritt klar hervor, wenn man den Fall $r = 1$ und $g = 3$ behandelt. Wegen 9.1 benötigt man lediglich eine Beziehung zwischen $\alpha(D, D^2)$ und $\alpha(D^2, D)$. Diese bekommt man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \alpha(D, D^2)(a) &= S(DD_a D_a - DDD) \\ &= S(DD_a D_a - DDD_a + DDD_a - DDD) \\ &= S(DD_a(D_a - D)) + S(DD(D_a - D)) \\ &= 2S(DD(D_a - D)) \\ &= 2\alpha(D^2, D)(a) \end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichung wurde wesentlich 9.2 ausgenutzt. □

Wir kommen nun zu einem wichtigen Kriterium von Matsusaka und Hoyt. zunächst eine Definition: Sei Γ eine reduzierte vollständige Kurve, C_1, \dots, C_m die Normalisierungen ihrer irreduziblen Komponenten. Man definiert

$$\text{Jac}(\Gamma) = \text{Jac}(C_1) \times \cdots \times \text{Jac}(C_m)$$

und versieht diese abelsche Varietät mit der Produktpolarisierung. Dies ist die Vereinigung aller Divisoren, die man erhält, wenn man in $\text{Jac}(C_1) \times \cdots \times \text{Jac}(C_m)$ eine Komponente $\text{Jac}(C_i)$ durch ihren Polarisierungsdivisor ersetzt. Wir erinnern an die Albaneseabbildung: Ist $\Gamma \rightarrow X$ eine holomorphe Abbildung in eine abelsche Varietät, so gibt es eine kanonische Ausdehnung zu einem Homomorphismus abelscher Varietäten $\text{Jac}(\Gamma) \rightarrow X$.

9.4 Satz. Sei (X, D) eine hauptpolarisierte abelsche Varietät der Dimension g und $\Gamma \subset X$ ein effektiver Einszykel. Es gelte:

Das $(g - 1)$ -fache Schnittprodukt von D mit sich selbst ist kohomolog zu $(g - 1)![\Gamma]$.

Dann haben die irreduziblen Komponenten $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ von Γ alle die Multiplizität eins und der Albanese-Homomorphismus

$$\text{Jac}(\Gamma) \longrightarrow X$$

ist ein Isomorphismus polarisierter abelscher Varietäten.

Beweisskizze. Unter $\text{Jac}(\Gamma)$ verstehen wir die Jacobivarietät der Γ zugrundeliegenden (reduzierten) Kurve. Wir bezeichnen mit

$$F : \text{Jac}(\Gamma) \longrightarrow X$$

die Albanese-Abbildung. Wir zeigen nun, dass aus der Voraussetzung von Satz 9.4 folgt:

Behauptung: Die Abbildung $F : \text{Jac}(\Gamma) \longrightarrow X$ ist surjektiv, d.h. X wird von Γ erzeugt.

Zum Beweis der Behauptung konstruiert man eine Abbildung in der Gegenrichtung

$$G : X \longrightarrow \text{Jac}(\Gamma)$$

wie folgt: Man betrachtet für ein $t \in X$ den Nullzykel $\Gamma \cdot (D - D_t)$ auf X und zieht diesen zu einem Nullzykel auf der Normalisierung C der Γ zugrundeliegenden Kurve zurück. Dies ist eine Divisorenklasse auf Γ . Auf diese kann man die Abel-Jacobi-Abbildung u anwenden und erhält ein Element $G(t) \in \text{Jac}(\Gamma)$. Die Zusammensetzung $F \circ G$ ist nichts anderes als die Abbildung $\alpha(\Gamma, D)$. Dies ist nach Hilfssatz 9.3 ein vielfaches der Identität. Aus den numerischen Annahmen folgt, dass sie genau die Identität ist. Es folgt die behauptete Surjektivität von F .

Wir wollen haben, dass F und G sich umkehrende Isomorphismen sind. Wegen $F \circ G = \text{id}$ ist dies gleichbedeutend mit

$$\dim \text{Jac}(\Gamma) = \dim X = g.$$

Der Einfachheit halber wollen wir den Beweis von hierfür nur im Fall eines irreduziblen Γ durchführen.

Für generisches $t \in X$ hat $\Gamma \cdot (D - D_t)$ genau g Schnittpunkte. Dies liefert für generisches t ein Element von $C^{(g)}$. Dies liefert eine rationale Abbildung

$$X \dashrightarrow C^{(g)}.$$

Man kann diese mit der Abel-Jacobi-Abbildung zusammensetzen und bekommt so eine rationale Abbildung

$$X \dashrightarrow \text{Jac}(C).$$

Diese Abbildung kann man auch auf anderem Wege bekommen: Man betrachtet den durch den amplen Divisor D definierten Homomorphismus $X \rightarrow \text{Pic}^0(X)$, $t \rightarrow D - D_t$, sowie den natürlichen Homomorphismus

$$\text{Pic}^0(X) \longrightarrow \text{Pic}^0(C) = \text{Jac}(C).$$

Der so gewonnene Homomorphismus $X \rightarrow \text{Jac}(C)$ stimmt offenbar mit der obigen rationalen Abbildung überein. Wir zeigen, dass er einen endlichen Kern hat. Dies liegt an einem allgemeinen Hilfssatz:

9.5 Hilfssatz. *Sei $C \rightarrow X$ eine holomorphe Abbildung einer glatten zusammenhängenden Kurve in eine abelsche Varietät X . Wenn diese von dem Bild von C erzeugt wird, so hat $\text{Pic}^0 X \rightarrow \text{Pic}^0 C$ endlichen Kern.*

Dieser Hilfssatz folgt leicht aus der Tatsache, dass die Dualisierung eines surjektiven Homomorphismus abelscher Varietäten (hier $\text{Jac}(C) \rightarrow X$) endlichen Kern hat. \square

Wir wissen nun, dass die rationale Abbildung

$$X \dashrightarrow C^{(g)} \longrightarrow \text{Jac}(C)$$

in Wahrheit ein Homomorphismus mit endlichem Kern ist. Wir behaupten nun noch $g(C) := \dim \text{Jac}(C) = g$. Wir wissen bereits nach Voraussetzung $g \leq g(C)$. Es muss die umgekehrte Ungleichung bewiesen werden. Da das Bild von X in $\text{Jac}C$ die Dimension g hat, muss die rationale Abbildung $X \dashrightarrow C^{(g)}$ dominant sein. Die Ungleichung $g(C) \leq g$ folgt daher aus einem weiteren

9.6 Hilfssatz. *Sei C ein Kurve vom Geschlecht $g(C)$ und X eine abelsche Varietät der Dimension g . Es existiere eine dominante rationale Abbildung*

$$X \dashrightarrow C^{(g)}.$$

Dann gilt $g(C) \leq g$.

Zum Beweis betrachtet man die Zusammensetzung mit der Abel-Jacobi-Abbildung

$$X \longrightarrow C^{(g)} \longrightarrow \text{Jac}(C).$$

Nach einem allgemeinen Satz über abelsche Varietäten ist dies die Zusammensetzung eines Homomorphismus mit einer Translation. Dieser Homomorphismus ist surjektiv, da $\text{Jac}(C)$ als Gruppe von C (also erst recht von $C^{(g)}$) erzeugt wird. Dies bedingt $g(C) \geq g$. \square

Dies beendet den Beweis von 9.4 im irreduziblen Fall. Im nicht irreduziblen Fall geht man wie folgt vor: Man betrachtet die von den irreduziblen Komponenten Γ_i erzeugte abelsche Untervarietät. Leider bekommt man für die Tripel (X_i, Γ_i, D_i) mit $D_i = D \cdot X_i$ nicht so ohne weiteres die volle numerische Information. Man muss daher zeigen, dass man den Beweis im irreduziblen Fall unter folgenden schwächeren Voraussetzungen durchführen kann:

X wird von Γ erzeugt und es gilt $\text{Grad}(D \cdot \Gamma) \leq g$.

Wie oben zeigt man im irreduziblen Fall, dass hieraus $\text{Grad}(D \cdot \Gamma) = g = \dim \text{Jac}(\Gamma)$ gilt. Das Problem ist, die Polarisierung D zu identifizieren. Wir gehen hierauf nicht ein.

10. Welters' Charakterisierung Jacobischer

Drei verschiedene Punkte einer hauptpolarisierten abelschen Varietät heißen sekant, wenn ihre Bilder unter der Kummerabbildung auf einer Geraden liegen. Der folgende Satz stammt im wesentlichen von Gunning und wurde in dieser Form von Welters bewiesen:

10.1 Satz (Gunning-Welters). *Sei (X, D) eine hauptpolarisierte irreduzible abelsche Varietät und seien $a = 0, b, c$ drei verschiedene Punkte von X . Es existiere eine irreduzible vollständige Kurve $V_1 \subset X$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $\zeta \in V_1$ sind $a + \zeta, b + \zeta, c + \zeta$ sekant. Sei V das Bild von V_1 unter der Abbildung $z \mapsto 2z$. Wir fassen V als Zykel mit Multiplizität eins auf. Dann ist D^{g-1} kohomologisch äquivalent zu einem Vielfachen von V und $\alpha(V, D)$ bildet entweder alle drei Punkte auf Null ab oder läßt sie alle drei fest.*

Wir nennen die drei Punkte unabhängig, wenn es keinen von Null verschiedenen Endomorphismus $\alpha : X \rightarrow X$ gibt, unter dem die drei Punkte auf 0 abgebildet werden. Liegen b und c in allgemeiner Lage, so ist dies der Fall. Aus 10.1 folgt der

10.2 Satz von Gunning. *Die drei Punkte $a = 0, b, c$ seien unabhängig. Es existiere eine irreduzible vollständige Kurve $V_1 \subset X$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $\zeta \in V_1$ sind $a + \zeta, b + \zeta, c + \zeta$ sekant. Dann ist (X, D) eine Jacobische. Genauer gilt: Die Albanese-Abbildung $\text{Jac}(V) \rightarrow X$ ist ein Isomorphismus polarisierter abelscher Varietäten.*

Zum Beweis wendet man 10.1 an. Wegen der Unabhängigkeit der drei Punkte ist $\alpha(V, D)$ auf ihnen die Identität. Insbesondere ist $\alpha = \alpha(V, D) - \text{id}$ gleich null auf den drei Punkten. Nochmalige Anwendung der Unabhängigkeit zeigt $\alpha(V, D) = \text{id}$ auf ganz X . Dies ist aber genau die numerische Annahme des Kriteriums von Matsusaka-Hoyt 9.4. \square

Wir werden lediglich eine Variante von 10.1 beweisen, welche den Gunning'schen Satz nicht einmal impliziert. Zuvor formulieren wir noch ein fundamentale Verallgemeinerung von Welters von 10.1.

Wir erinnern daran, dass ein abgeschlossenes Unterschema durch eine kohärente Idealgarbe $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ definiert wird. Das Unterschema ist dann der Träger Y von $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ versehen mit der Garbe von Ringen $\mathcal{O}_Y := \mathcal{O}_X/\mathcal{J}|_Y$. Man hat eine natürliche Inklusion

$$(Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X).$$

Ist \mathcal{K} eine weitere Idealgarbe, so bedeutet $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$ die Inklusion der Unterschemata in umgekehrter Richtung. Das Unterschema heißt Artinsch, falls Y eine endliche Menge ist. Ein Artinsches Unterschema ist einfach gegeben durch die Vorgabe einer endliche Teilmenge $Y \subset X$ und für jedes $y \in Y$ eines Ideals $\mathcal{J}_y \subset \mathcal{O}_{X,x}$, so dass $\mathcal{O}_{X,y}/\mathcal{J}_y$ endliche Dimension hat. Die Summe all dieser Dimensionen nennt man die Länge von Y .

Wir sind an Artinschen Unterschemata der Länge drei interessiert. Ihr Träger Y besteht aus einem zwei oder drei Punkten. Ein solches Unterschema heißt sekant, falls es eine Gerade $l \in P^N$ gibt ($N = 2^g - 1$), so dass Y im Urbild dieser Geraden bezüglich der Kummerabbildung $X \rightarrow P^N(\mathbb{C})$ enthalten ist. Nun die Verallgemeinerung von 10.1 von Welters:

10.3 Satz von Welters. *Sei $Y \subset X$ ein Artinsches Unterschema der Länge drei, dessen Träger den Nullpunkt enthält. Es existiere eine irreduzible vollständige Kurve $V_1 \subset X$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $\zeta \in V_1$ sind $\zeta + Y$ sekant. Sei V das Bild von V_1 unter der Abbildung $z \mapsto 2z$. Wir fassen V als Zykel mit Multiplizität eins auf. Dann ist D^{g-1} kohomologisch äquivalent zu einem Vielfachen von V und die Einschränkung von $\alpha(V, D)$ auf das Unterschema Y ist entweder die Nullabbildung oder die Identität.*

11. Eine Variante des Satzes von Welters

Uns interessiert besonders der Fall, wo der Träger des Artinschen Schemas $Y \subset X$ aus genau einem Punkt besteht. Dieser sei der Nullpunkt in X . Ein solches Unterschema ist also einfach gegeben durch ein Ideal $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{O}_{X,0}$ mit $\dim \mathcal{O}_{X,0}/\mathcal{J}_0 = 3$. Das einfachste im Nullpunkt konzentrierte Ideal ist die r -te Potenz des maximalen Ideals. Die zugehörige Idealgarbe \mathcal{M}_r beschreibt die r -fache Verdickung des Nullpunkts. Ist irgendein abgeschlossenes Unterschema von X mit Idealgarbe \mathcal{J} gegeben, so kann man das Ideal $\mathcal{M}_r + \mathcal{J}$ betrachten. Dies beschreibt den infinitesimalen Anteil von des Unterschemas bis zur Ordnung r . Dahinter steht eine formale Konstruktion: Unter einer formalen Kurve

durch $0 \in X$ versteht man eine formale Potenzreihe

$$\varepsilon D_1 + \varepsilon D_2 + \dots$$

mit Elementen $D_i \in \mathbb{C}^g$. Wenn diese Reihe in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$ konvergiert, definiert sie eine analytische Kurve durch 0 in \mathbb{C}^g und dann in X . Jeder holomorphen Abbildung einer Kreisscheibe um 0 in X , welche 0 in 0 abbildet ist eine solche formale Kurve zugeordnet. Man liftet sie einfach zu einer Kurve in \mathbb{C}^g bezüglich der Exponentialabbildung $\mathbb{C}^g \rightarrow X$ und macht eine Taylorentwicklung.

Wir fassen die Elemente D_i als lineare Differentialoperatoren auf. Wir definieren dann neue Differentialoperatoren durch

$$\Delta_0 = \text{id}, \quad \Delta_1 = D_1, \quad \Delta_2 = \frac{1}{2}D_1^2 + D_2, \dots$$

das allgemeine Gesetz erfolgt nach der Regel

$$\exp \sum_{i=1}^{\infty} D_i \varepsilon^i = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j \varepsilon^j.$$

Man rechnet leicht nach, dass die Abbildung

$$\mathcal{O}_{X,0} \longrightarrow \mathbb{C}[[\varepsilon]], \quad f \longmapsto \sum \Delta_j(f)(0) \varepsilon^j$$

ein Ringhomomorphismus ist. (Im Falle einer analytischen Kurve ist dies genau die Taylorentwicklung.) Man kann die Potenzreihe abbrechen und erhält einen Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{X,0} \longrightarrow \mathbb{C}[[\varepsilon]]/(\varepsilon^3), \quad f \longmapsto (D_1 f)(0) \varepsilon + (D_1^2/2 + D_2)(f)(0) \varepsilon^2.$$

Dieser ist surjektiv, wenn D_1 von Null verschieden ist. Sein Kern definiert ein Artinsches Unterschema Y der Länge 3. Man hat einen Isomorphismus

$$\text{Spec}(\mathbb{C}[[\varepsilon]]/(\varepsilon^3)) \xrightarrow{\sim} Y.$$

Wir formulieren nun die infinitesimal Variante des Gunningschen Kriteriums, die wir benötigen:

11.1 Variante des Satzes von Welters. *Sei (X, Θ) eine unzerlegbare hauptpolarisierte abelsche Varietät und seien $D_1 \neq 0$, D_2 zwei Elemente von \mathbb{C}^g und Y das zugeordnete Artinsche Unterschema der Länge drei von X . Die (algebraische Menge)*

$$V = \{ 2u; \quad u + Y \text{ ist sekant} \}$$

habe positive Dimension. Dann ist V eine irreduzible und glatte Kurve und (X, Θ) ist ihre Jacobische.

Aus dem Kriterium von Welters folgt, dass die KP-Hierarchie die Jacobischen charakterisiert.

11.2 Folgerung. *Sei (X, Θ) eine unzerlegbare hauptpolarisierte abelsche Varietät. Sei $D_1 \neq 0, D_2, D_3, \dots$ eine Folge von Vektoren aus dem \mathbb{C}^g und sei $d_3 \neq 0, d_4, \dots$ eine Folge von Zahlen, so dass die KP-Hierarchie (etwa in der Form 8.2) erfüllt ist. Dann ist (X, Θ) eine Jacobische einer Kurve C .*

Die Kurve C wird dann in einer Umgebung von $0 \in X$ durch die analytische Kurve

$$2 \sum_{i=1}^{\infty} D_i \epsilon^i$$

gegeben.

12. Beweis des Welters'schen Kriteriums

13. Die Novikov- Vermutung