

Der Ricci-Fluss auf Flächen

Es wird der Riccifluss auf einer kompakten Riemannschen Fläche negativer Krümmung studiert.

1. Problemstellung

Unter einer Riemannschen Fläche (\mathcal{M}, g) verstehen wir hier eine zweidimensionale zusammenhängende orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit $d\mu$ das g zugeordnete Flächenmaß. Jedem Punkt $a \in \mathcal{M}$ ist die skalare Krümmung $R(a)$ zugeordnet. Sie ist das Doppelte der Gaußsche Krümmung, $R(a) = 2K(a)$. Für die Riccigrümmung einer Riemannschen Fläche gilt:

$$2Rc = R \cdot g.$$

Wenn \mathcal{M} kompakt ist, kann man R über ganz \mathcal{M} mitteln und erhält die normalisierte *mittlere Krümmung*

$$r := \frac{\int_{\mathcal{M}} R d\mu}{\int_{\mathcal{M}} d\mu}.$$

Nach dem Satz von Gauß–Bonnet hängt diese nur von dem topologischen Typ von \mathcal{M} ab. Insbesondere hängt r nicht ab von der Wahl der Metrik g auf \mathcal{M} und ist genau dann negativ, wenn das topologische Geschlecht positiv ist.

Im folgenden bezeichnen wir mit \dot{f} die Ableitung einer Funktion $f(t)$ nach t . Ziel ist der Beweis von

1.1 Theorem. *Sei $(\mathcal{M}, g(0))$ eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Schar von Riemannschen Metriken $g(t)$, $t \in [0, \infty)$, welche von t differenzierbar abhängt und so dass gilt:* HS

$$\dot{g} = (r - R)g.$$

Für $t \rightarrow \infty$ konvergiert $g(t)$ gegen eine Metrik $g(\infty)$ konstanter Krümmung r und zwar gleichmäßig in allen Ableitungen.

Zwei Riemannsche Metriken g_1, g_2 auf \mathcal{M} heißen konform äquivalent, falls es eine positive differenzierbare Funktion h auf \mathcal{M} gibt, so dass $g_2 = hg_1$ gilt. Der große Riemannsche Abbildungssatz kann folgendermaßen ausgesprochen werden:

Sei (\mathcal{M}, g) eine Riemannsche Fläche. Dann existiert eine konform äquivalente Metrik, welche konstante Krümmung hat.

Dieser Satz folgt für kompakte Flächen aus 1.1, denn es gilt:

1.2 Bemerkung. Sei $g(t)$ eine differenzierbare Schar Riemannscher Metriken parametrisiert durch ein Intervall $[0, b)$. Es gelte

$$\dot{g} = hg$$

mit einer positiven Funktion $h : \mathcal{M} \times [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind alle $g(t)$ konform äquivalent, genauer gilt

$$g(t) = g(0) e^{\int_0^t h(\tau) d\tau}.$$

Zum Beweis benutze man, dass das positive definite $g(t)$ einen eindeutig bestimmten symmetrischen reellen Logarithmus $\log g(t)$ hat. Es gilt

$$\frac{\partial \log g(t)}{\partial t} = h(t).$$

Durch Integration folgt die Behauptung.

2. Etwas Riemannsche Geometrie

Sei \mathcal{M} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit $T_a\mathcal{M}$ den Tangentialraum von \mathcal{M} in a , mit $T_a^*\mathcal{M}$ seinen Dualraum und mit

$$T_a^{p,q}(\mathcal{M}) := \overbrace{T_a^*\mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_a^*\mathcal{M}}^{p\text{-fach}} \otimes \overbrace{T_a\mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_a\mathcal{M}}^{q\text{-fach}}.$$

Diese können auch als Multilinearformen

$$\overbrace{\mathcal{T}_a(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathcal{T}_a(\mathcal{M})}^{p\text{-fach}} \times \overbrace{\mathcal{T}_a^*(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathcal{T}_a^*(\mathcal{M})}^{q\text{-fach}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

betrachtet werden. Schließlich bezeichnen wir für eine offene Teilmenge $U \subset \mathcal{M}$ mit $\mathcal{T}^{p,q}(U)$ die Menge der auf U definierten und differenzierbaren Tensorfelder des entsprechenden Typs. Man nennt sie p -fach kontravariant und q -fach kovariant. Wir erinnern daran, dass die Elemente von \mathcal{T} , sogenannte Vektorfelder, Derivationen $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ sind. Ist \mathcal{M} ein offener Teil des \mathbb{R}^n , so sind $\partial/\partial x_i$ Basisvektorfelder. Die hierzu dualen Dualfelder sind $dx_i \in \mathcal{T}^*(\mathcal{M})$. Die Elemente von $\mathcal{T}^*(\mathcal{M})$ heißen Differentiale.

Wir erläutern einige Formeln der Riemannschen Geometrie. Der Levi-Civita-Zusammenhang ordnet jedem $A \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$\nabla_A : \mathcal{T}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{M})$$

zu. Diese genügt der Produktregel

$$\nabla_A(fB) = A(f)B + f\nabla_A(B)$$

und außerdem den Regeln

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

Die Christoffelsymbole sind durch

$$\nabla_{\partial_i} \partial_k = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

definiert. Sie berechnen sich durch

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n g^{k\nu} (\partial_j g_{i\nu} + \partial_i g_{\nu j} - \partial_\nu g_{ij}).$$

Die Abbildung

$$Rm(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

ist bilinear und definiert daher einen Tensor Rm , den Riemannschen Krümmungstensor. Der Riemannsche Krümmungstensor kann aufgefaßt werden als Multilinearform auf $\mathcal{T} \times \mathcal{T} \times \mathcal{T} \times \mathcal{T}$. Er ist definiert durch

$$Rm(A, B, C, D) = g(R(A, B)C, D)$$

Setzt man $A = \partial_i$, $B = \partial_j$, $C = \partial_k$, $D = \partial_l$, so erhält man die Standardformel für die Komponenten $R_{ijkl} = Rm(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l)$ des Krümmungstensors:

$$R_{ijkl} = \sum_{\nu} g_{\nu l} R_{ijk}^{\nu}$$

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \sum_p (\Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l).$$

Der Riemannsche Krümmungstensor $R(A, B, C, D)$ ist alternierend in A und B und auch in C und D . Kontrahiert man die beiden mittleren Komponenten C und D , so erhält man den Ricci-Tensor. Dieser ist symmetrisch. Kontrahiert man diesen nochmals, so erhält man die skalare Krümmung R . Im Falle der Dimension zwei ist diese das doppelte der Gaußschen Krümmung und durch die Formel

$$R = -2 \frac{R_{1212}}{\det g} = -2 \frac{g_{12} R_{121}^1 + g_{22} R_{121}^2}{\det g}$$

gegeben.

Der rohe Laplace-Operator

Zunächst werde daran erinnert, dass die kovariante Ableitung auch für Differentiale durch die Formel

$$\nabla_A(\omega)(B) = A\omega(B) - \omega(\nabla_A(B))$$

erklärt werden kann. Man kann nun den Nabla-Operator auf beliebige Tensoren ausdehnen, so dass diese Ausdehnung mit beliebiger Verjüngung verträglich ist und so, dass die Produktregel

$$\nabla_A(T \otimes S) = T \otimes \nabla_A(S) + \nabla_A(T) \otimes S$$

gilt. Man kann dann den Nablaoperator ∇ ohne Index durch

$$\nabla(T)(A, A_1, \dots, A_p, \omega_1, \dots, \omega_q) := (\nabla_A T)(A_1, \dots, A_p, \omega_1, \dots, \omega_q)$$

definieren. Dabei wird (p, q) durch $(p+1, q)$ ersetzt. Damit kann man auch ∇^2 definieren. Hier wird (p, q) durch $(p+2, q)$ ersetzt. Kontrahiert man die zwei zugewonnenen neuen Variablen, so erhält man den *rohen Laplace-Operator* Δ . Angewendet auf Funktionen ist dies bis aufs Vorzeichen der Laplace-Beltrami-Operator. (Für Differentialformen höheren Grades stimmt dies aber nicht.) Wir berechnen Δf für Funktionen f . Es ist $\nabla_A f = Af$, also $\nabla f = df$. Wir erhalten

$$(\nabla^2)f(A, B) = (\nabla_A(df))(B) = ABf - \nabla_A(B)f$$

In der lokalen Basis $\partial_i = \partial/\partial x_i$ errechnet man den Laplace-Operator wirkend auf Funktionen zu

$$\Delta = \sum_{ij} g^{ij} \left(\partial_i \partial_j - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \right).$$

3. Konformer Wechsel der Metrik

Sei (\mathcal{M}, g) eine Riemannsche Fläche. Wir verändern nun die Metrik g konform, indem wir

$$h = e^{-u}g, \quad u \in C^\infty(\mathcal{M}),$$

bilden.

3.1 Lemma. *Seine g, h zwei Metriken auf einer Fläche \mathcal{M} , welche konform äquivalent sind,* crR

$$g = e^u h.$$

Dann sind die skalaren Krümmungen R_g, R_h durch die Formel

$$R_g = e^{-u}(-\Delta_h u + R_h)$$

aufeinander bezogen. Hierbei ist Δ_h der Laplace-Operator der Metrik h .

Beweis. Wir benötigen die Ableitungen der Christoffelsymbole und rechnen diese einfach aus:

$$\begin{aligned}\partial_l \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{\nu} g^{k\nu} (\partial_l \partial_j g_{i\nu} + \partial_l \partial_i g_{\nu j} - \partial_l \partial_\nu g_{ij}) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{\nu} (\partial_l g^{k\nu}) (\partial_j g_{i\nu} + \partial_i g_{\nu j} - \partial_\nu g_{ij}).\end{aligned}$$

Die Ableitungen der inversen Matrix von g berechnen sich zu $(\partial_l g^{-1})g + g^{-1}\partial_l g = 0$, also

$$\partial_l g^{ik} = - \sum_{\mu\nu} g^{i\mu} g^{k\nu} \partial_l g_{\mu\nu}.$$

Nach Voraussetzung ist $g = Uh$ mit einer positiven Funktion $U = e^{-2u}$. Wir wollen dies Formel aus 3.1 in einem vorgegeben Punkt von \mathcal{M} beweisen und wählen für diesen Punkt ein adaptiertes Koordinatensystem. Die Matrix h soll in diesem Punkt die Einheitsmatrix sein und die ersten Ableitungen von h in diesem Punkt sollen verschwinden (Normalkoordinaten für die Metrik h). In einem solchen Punkt ist g ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix e . Dann vereinfacht sich die zweite Formel zu

$$\partial_l g^{ik} = -U^{-2} \partial_l g_{ik}$$

und die erste zu

$$\partial_l \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2U} (\partial_l \partial_j g_{ik} + \partial_l \partial_i g_{kj} - \partial_l \partial_k g_{ij}) - \frac{1}{2U^2} \sum_{\nu} (\partial_l g_{k\nu}) (\partial_j g_{i\nu} + \partial_i g_{\nu j} - \partial_\nu g_{ij})$$

Die Christoffelsymbole selbst in ausgewertet in einem solchen Punkt sind

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2U} (\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ij}).$$

Auch die noch auftretenden ersten Ableitungen können in dem Punkt ausgewertet werden. Differenziert man Uh_{ik} , so folgt nach Auswerten

$$\partial_\nu g_{ik} = \partial_\nu U \delta_{ik}.$$

Wir erhalten somit (nach Auswerten)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2U} (\partial_j U \delta_{ik} + \partial_i U \delta_{kj} - \partial_k U \delta_{ij})$$

und

$$\partial_l \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2U} (\partial_l \partial_j g_{ik} + \partial_l \partial_i g_{kj} - \partial_l \partial_k g_{ij}) - \frac{\partial_l U}{2U^2} (\partial_j U \delta_{ik} + \partial_i U \delta_{kj} - \partial_k U \delta_{ij})$$

Im Falle $n = 2$ kann man sich jetzt eine Tabelle der Christoffelsymbole und ihrer Ableitungen nach Auswerten verschaffen:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2U} \partial_1 U \\ \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2U} \partial_2 U\end{aligned}$$

Auch ihre Ableitungen nach Auswerten ergeben sich:

$$\begin{aligned}\partial_1 \Gamma_{21}^2 &= \frac{\partial_1^2 g_{22}}{2U} - \frac{(\partial_1 U)^2}{2U^2} \\ \partial_2 \Gamma_{11}^2 &= \frac{2\partial_1 \partial_2 g_{12} - \partial_2^2 g_{11}}{2U} + \frac{(\partial_2 U)^2}{2U^2}\end{aligned}$$

Jetzt können wir die skalare Krümmung auswerten:

$$\begin{aligned}R &= -\frac{2R_{121}^2}{U} = -\frac{2}{U}(\partial_1 \Gamma_{21}^2 - \partial_2 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2) \\ &= -\frac{\partial_1^2 g_{22} - 2\partial_1 \partial_2 g_{12} + \partial_2^2 g_{11}}{U^2} + \frac{(\partial_1 U)^2 + (\partial_2 U)^2}{U^3}\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir uns den zweiten Ableitungen zu. Nach Auswerten gilt

$$\partial_\mu \partial_\nu g_{ik} = \partial_\mu \partial_\nu U \delta_{ik} + U \partial_\mu \partial_\nu h.$$

Dies liefert

$$R = -\frac{\partial_1^2 h_{22} - 2\partial_1 \partial_2 h_{12} + \partial_2^2 h_{11}}{U} - \frac{\partial_1^2 U + \partial_2^2 U}{U^2} + \frac{(\partial_1 U)^2 + (\partial_2 U)^2}{U^3}$$

Man kann diese Formel auch für die Funktion $U = 1$ lesen. Dann erhält man die Krümmung bezüglich h . Zur Unterscheidung verwenden wir jetzt die Bezeichnungen R_g bzw. R_h für die skalare Krümmung bezüglich g bzw. h . Wir sehen somit:

$$R_g = \frac{R_h}{U} - \frac{\partial_1^2 U + \partial_2^2 U}{U^2} + \frac{(\partial_1 U)^2 + (\partial_2 U)^2}{U^3}$$

In unserer Anwendung ist $U = e^u$. Die Formel in 3.1 ist nunmehr äquivalent zu

$$\Delta_h u = \frac{\partial_1^2 U + \partial_2^2 U}{U} - \frac{(\partial_1 U)^2 + (\partial_2 U)^2}{U^2}$$

Nach Auswertung gilt offenbar

$$\Delta_h u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u.$$

Die behauptete Formel ist nun klar. □

Wir bezeichnen im folgenden mit \dot{v} die Ableitung einer (u.a.) von t abhängigen Funktion v nach t . Insbesondere verstehen wir unter \dot{g}^{ij} die Ableitung von g^{ij} nach t .

3.2 Lemma. *Sei $g(t)$ eine differenzierbare Familie von Metriken auf einer Mannigfaltigkeit, $\Delta = \Delta_{g(t)}$ der Laplace-Operator. Dann gilt für eine (von t unabhängige) differenzierbare Funktion u auf \mathcal{M} :* Epf

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) &= \sum_{ij} \dot{g}^{ij} \partial_i \partial_j u - \\ &\quad \sum_{ij\nu k} \dot{g}^{ij} g^{k\nu} (\partial_j g_{i\nu}) \partial_k u - \frac{1}{2} \sum_{ij\nu k} \dot{g}^{ij} g^{k\nu} (\partial_\nu g_{ij}) \partial_k u - \\ &\quad \sum_{ij\nu k} g^{ij} g^{k\nu} (\partial_i \dot{g}_{j\nu}) \partial_k u + \frac{1}{2} \sum_{ij\nu k} g^{ij} g^{k\nu} (\partial_\nu \dot{g}_{ij}) \partial_k u - \\ &\quad \sum_{ij\nu k} g^{ij} \dot{g}^{k\nu} (\partial_i g_{j\nu}) \partial_k u + \frac{1}{2} \sum_{ij\nu k} g^{ij} \dot{g}^{k\nu} (\partial_\nu g_{ij}) \partial_k u \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{ij} g^{ij} \left(\partial_i \partial_j - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \right) u \\ &= \sum_{ij} \left(\dot{g}^{ij} \left(\partial_i \partial_j - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \right) u + g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} \left(\partial_i \partial_j - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \right) u \right). \\ &= \sum_{ij} \dot{g}^{ij} \partial_i \partial_j u - \\ &\quad \sum_{ijk} \dot{g}^{ij} \Gamma_{ij}^k \partial_k u - \\ &\quad \sum_{ijk} g^{ij} \dot{\Gamma}_{ij}^k \partial_k u. \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\nu=1}^n g^{k\nu} [\partial_j g_{i\nu} + \partial_i g_{\nu j} - \partial_\nu g_{ij}] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n g^{k\nu} [\partial_j \dot{g}_{i\nu} + \partial_i \dot{g}_{\nu j} - \partial_\nu \dot{g}_{ij}] + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n \dot{g}^{k\nu} [\partial_j g_{i\nu} + \partial_i g_{\nu j} - \partial_\nu g_{ij}] \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \sum_{ij} g^{ij} \dot{\Gamma}_{ij}^k &= \sum_{ij\nu} g^{ij} g^{k\nu} \partial_i \dot{g}_{j\nu} - \frac{1}{2} \sum_{ij\nu} g^{ij} g^{k\nu} \partial_\nu \dot{g}_{ij} + \\ &\quad \sum_{ij\nu} g^{ij} \dot{g}^{k\nu} \partial_i g_{j\nu} - \frac{1}{2} \sum_{ij\nu} g^{ij} \dot{g}^{k\nu} \partial_\nu g_{ij} \end{aligned}$$

Hieraus folgt 3.2 unmittelbar. \square

Die Formel aus 3.2 vereinfacht sich, wenn man annimmt, dass $\dot{g} = fg$ mit einer skalaren Funktion gilt. Dann folgt aus $g^{-1}g = e$ durch Differentiation

$$\dot{g}^{ij} = -fg^{ij}.$$

Dies setzen wir in 3.2 ein.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) &= -f \sum_{ij} g^{ij} \partial_i \partial_j u + \\ &\quad f \sum_{ij\nu k} g^{ij} g^{k\nu} (\partial_j g_{i\nu}) \partial_k u - \frac{1}{2} f \sum_{ij\nu k} g^{ij} g^{k\nu} (\partial_\nu g_{ij}) \partial_k u - \\ &\quad \sum_{ij\nu k} g^{ij} g^{k\nu} (\partial_i \dot{g}_{j\nu}) \partial_k u + \frac{1}{2} \sum_{ij\nu k} g^{ij} g^{k\nu} (\partial_\nu \dot{g}_{ij}) \partial_k u + \\ &\quad f \sum_{ij\nu k} g^{ij} g^{k\nu} (\partial_i g_{j\nu}) \partial_k u - \frac{1}{2} f \sum_{ij\nu k} g^{ij} g^{k\nu} (\partial_\nu g_{ij}) \partial_k u \end{aligned}$$

Jetzt nutzt man

$$\partial_\alpha \dot{g}_{\beta\gamma} = f \partial_\alpha g_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma} \partial_\alpha f$$

aus. Die Terme der dritten Zeile, welche den Faktor f enthalten, kürzen sich gegen die vierte Zeile und es verbleibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) &= -f \sum_{ij} g^{ij} \partial_i \partial_j u + \\ &\quad f \sum_{ij\nu k} g^{ij} g^{k\nu} (\partial_j g_{i\nu}) \partial_k u - \frac{1}{2} f \sum_{ij\nu k} g^{ij} g^{k\nu} (\partial_\nu g_{ij}) \partial_k u - \\ &\quad \sum_{ij\nu k} g^{ij} g^{k\nu} g_{j\nu} \partial_i f \partial_k u + \frac{1}{2} \sum_{ij\nu k} g^{ij} g^{k\nu} g_{ij} \partial_\nu f \partial_k u \end{aligned}$$

Die ersten beiden Zeilen ergeben $-f\Delta u$. Nutzt man noch

$$\sum_{ij} g^{ij} g^{k\nu} g_{j\nu} = g^{kj} \quad \text{und} \quad \sum_{ij} g^{ij} g_{ij} = n$$

aus, so folgt:

3.3 Lemma. Sei $g(t)$ eine differenzierbare einparametrische Familie von Metriken mit der Eigenschaft

$$\dot{g} = fg,$$

so gilt (für eine von t unabhängige differenzierbare Funktion u):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) = -f\Delta u + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \sum_{ik} g^{ik}(\partial_i f)(\partial_k u)$$

Folgerung. Im Falle $n = 2$ gilt für von t unabhängiges u

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u = -f\Delta u.$$

Folgerung.

$$\Delta_{g(t)}u = e^{-\int_0^t f(\tau)d\tau} \Delta_{g(0)}u.$$

Man kann aus 3.3 auch leicht eine Formel für zeitabhängiges u ableiten, indem man $\partial(\Delta t^m u)/\partial t = \partial(t^m \Delta u)/\partial t$ nach der Produktregel berechnet:

3.4 Lemma. Unter den Voraussetzungen von 3.3 gilt im Falle $n = 2$ für von t abhängiges u :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u = -f\Delta u + \Delta \dot{u}.$$

4. Evolution der Krümmung

Wir leiten eine Differentialgleichung für die skalare Krümmung unter dem Riccifluss auf einer Riemannschen Fläche her:

4.1 Lemma. Sei $g(t)$ eine differenzierbare Familie von Riemannschen Metriken auf einer Fläche \mathcal{M} , so dass $\partial g/\partial t = fg$ mit einer skalaren Funktion f gilt. Dann gilt

$$\dot{R} = -\Delta f - Rf.$$

Folgerung. Im Falle $f = r - R$ (normalisierter Riccifluss) folgt

$$\dot{R} = \Delta R + R(R - r).$$

Beweis. Nach 1.2 gilt $g = he^u$ mit einer konstanten Metrik h und einer skalaren Funktion u mit $\dot{u} = f$. Nach 3.1 gilt

$$R_g = e^{-u}(-\Delta_h u + R_h).$$

Differenziert man diese Formel, so folgt

$$\dot{R}_g = -\dot{u}e^{-u}(-\Delta_h u + R_h) - e^{-u}\Delta\dot{u} = -fR_g - e^{-u}\Delta_h f.$$

Aus der zweiten Folgerung von 3.3 erhält man leicht

$$e^{-u}\Delta_h f = \Delta_g f$$

und somit die Behauptung. □

Abschätzung der Krümmung nach unten

4.2 Satz. Sei $g(t)$ eine Lösung des normalisierten Ricci-Flusses, welche auf einem Intervall $[0, b)$ definiert ist. Die mittlere Krümmung r sei negativ. Es existiert eine Konstante C , welche nur von $g(0)$, nicht aber von I abhängt, so dass

$$-Ce^{rt} \leq R - r \quad \text{für } 0 \leq t < b$$

gilt.

Beweis. Man weiß aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, dass man eine Abschätzung der Lösungen der partiellen Differentialgleichung $\dot{R} = \Delta R + R(R - r)$ aus Abschätzungen von Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{S} = S(S - r)$ gewinnen kann. Genauer gilt:

Sei $S(t)$ eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung mit der Eigenschaft

$$R(x, 0) \geq S(0) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{M} \text{ und } r \geq 0 \ (r \in I).$$

Dann gilt

$$R(x, t) \geq S(t) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{M} \text{ und } r \geq 0 \ (r \in I).$$

Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung zu gegebenem Anfangswert $S(0)$ kann hinschreiben. Im Falle $r \neq 0$ hat man

$$S(t) = \frac{r}{1 - \left(1 - \frac{r}{S(0)}\right)e^{rt}}.$$

Nimmt man $S(0) = \min_{x \in \mathcal{M}} R(x, 0)$, so folgt

$$R \geq \frac{r}{1 - \left(1 - \frac{r}{S(0)}\right)e^{rt}}.$$

Da r nach Voraussetzung negativ ist, gilt

$$0 < \frac{r}{S(0)} = \frac{r}{\min_{x \in \mathcal{M}} R(x, 0)} < 1$$

und es folgt

$$0 < A := \left(1 - \frac{r}{S(0)}\right) < 1.$$

Dies zeigt auch, dass $S(t)$ für alle $t \geq 0$ definiert ist. (Hieran scheitert eine Abschätzung in die andere Richtung). Wir erhalten

$$R - r \geq \frac{r}{1 - Ar} - r = \frac{rAe^{rt}}{1 - Ae^{rt}}$$

und damit die Behauptung. \square

5. Krümmungspotential

Das Flächenintegral über die Funktion $R - r$ bezüglich des invarianten Flächenelements ist Null. Nach der Hodgetheorie existiert für jedes t eine Funktion f mit der Eigenschaft

$$\Delta f = R - r.$$

Man kann erreichen, dass $f(x, t)$ von (t, x) differenzierbar abhängt. Da harmonische Funktionen konstant sind, ist f bis auf die Abänderung $f(x, t) + c(t)$ mit einer nur von t abhängigen Funktion bestimmt. Man nennt f ein *Potential der Krümmung*. Man kann sich fragen, wie sich das Potential (nach geeigneter Wahl) zeitlich entwickelt.

5.1 Lemma. *Sei $g(t)$ eine Lösung des normalisierten Ricciflusses auf einer kompakten Fläche. Es existiert ein Potential f der Krümmung, welches der Differentialgleichung* Pg d

$$\dot{f} = \Delta f + rf$$

genügt.

Beweis. Wir betrachten zunächst eine beliebige Lösung der Gleichung

$$\Delta f_0 = R - r.$$

Aus 3.4 folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) = \Delta \dot{u} + (R - r)\Delta u.$$

Nun erhalten wir

$$\Delta \dot{f}_0 + (R - r)\Delta f_0 = \dot{R}.$$

Nutzt man die Evolutionsgleichung $\dot{R} = \Delta R + R(R - r)$ in Verbindung mit $R = \Delta f_0 + r$ aus, so folgt

$$\Delta \dot{f}_0 + (R - r)\Delta f_0 = \Delta \Delta f_0 + R(R - r)$$

und hieraus

$$\Delta \dot{f}_0 = \Delta(\Delta f_0 + r f_0).$$

Da harmonische Funktionen konstant sind, folgt

$$\dot{f}_0 = \Delta f_0 + r f_0 + \gamma$$

mit einer nur von t abhängigen Funktion $\gamma(t)$. Die Lösung des Problems ist nun

$$f(t) = f_0(t) - e^{rt} \int_0^t e^{-r\tau} \gamma(\tau) d\tau. \quad \square$$

6. Abschätzungen der Krümmung

Mittels des Maximumprinzips kann man das Potential f aus 5.1 nun abschätzen: Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{f} = r f$ ist eine Exponentialfunktion, man erhält somit:

6.1 Lemma. *Sei $g(t)$, $t \in (0, b)$, eine Lösung des normalisierten Ricci-
flusses auf einer kompakten Fläche. Dann gilt für ein wie in 5.1 normalisiertes
Potential der Krümmung:* Pab

$$|f| \leq C e^{rt}$$

mit einer Konstanten C , welche nur von $g(0)$ abhängt.

Es ist nun wichtig, dass man g aus dem Krümmungspotential f rekonstruieren kann: Aus den Gleichungen

$$\dot{g} = (r - R)g = \Delta f g = (\dot{f} - r f)g$$

folgt

$$g(t) = g(0) \exp\left[f(t) - f(0) - r \int_0^t f(\tau) d\tau\right].$$

Damit folgt aus der Abschätzung 6.1 für f :

6.2 Satz. *Sei $g(t)$, $0 \leq t < b$, eine Lösung des normalisierten Ricciflusses.
Dann existiert eine Konstante g , welche nur von $g(0)$ abhängt, so dass* Agr

$$\frac{1}{C} g(0) \leq g(t) \leq C g(0)$$

gilt.

6.3 Satz. Sei $g(t)$, $0 \leq t < b$, eine Lösung des normalisierten Ricciflusses, f ein wie in 5.1 normiertes Potential f der Krümmung. Mit

$$H := R - r + |df|^2$$

gilt

$$\dot{H} \leq \Delta H + rH.$$

Beweis. Wir beginnen mit der Gleichung 4.1:

$$\dot{R} = \Delta R + R(R - r).$$

Verwendet man $\Delta f = R - r$, so folgt

$$\dot{R} = \Delta R + (\Delta f)^2 + r(R - r).$$

Als nächstes behaupten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} |df|^2 = (R - r)|df|^2 + 2\langle d\Delta f, df \rangle + 2r|df|^2.$$

Der Beweis wird einfach mit Koordinaten x_1, \dots, x_n geführt. Definitionsgemäß ist

$$|df|^2 = \sum_{ij} g^{ij} (\partial_i f)(\partial_j f).$$

Leitet man mit der Produktregel ab, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} |df|^2 = \sum_{ij} \dot{g}^{ij} (\partial_i f)(\partial_j f) + 2 \sum_{ij} g^{ij} (\partial_i \dot{f})(\partial_j f).$$

Wir erinnern daran, dass aus der Flussgleichung die Formel

$$\dot{g}^{ij} = (R - r)g^{ij}.$$

Außerdem tragen wir $\dot{f} = \Delta f + rf$ ein. Die behauptete Formel ist nun evident. Zusammenfassend folgt nun

$$\dot{H} = \Delta H + rH + X$$

mit

$$X = \Delta |df|^2 - (\Delta f)^2 - R|df|^2 - 2\langle d\Delta f, df \rangle.$$

Es läuft also darauf hinaus, als *Schlüsselgleichung* $X \leq 0$ zu zeigen. Dies ist glücklicherweise eine allgemeine Ungleichung, welche für beliebige differenzierbare Funktionen f auf einer Riemannschen Fläche gilt. Vor dem Beweis benötigen wir eine kleine Vorbemerkung:

Das Skalarprodukt zweier Euklidischer Vektorräume V, W kann man in naheliegender Weise auf ihr Tensorprodukt $V \otimes W$ übertragen: Ist e_i eine Orthonormalbasis von V und f_j eine solche von W , so ist $e_i \otimes f_j$ eine solche des Tensorprodukts.

Sei V ein zweidimensionaler Euklidischer Vektorraum und T ein zweifacher Tensor und sei $t \in \mathbb{R}$ seine Verjüngung, so gilt

$$2|T|^2 \geq t^2.$$

Sind t_{ij} die Komponenten dieses Tensors bezüglich einer Orthonormalbasis, so bedeutet diese Ungleichung

$$2(t_{11}^2 + t_{12}^2 + t_{21}^2 + t_{22}^2) \geq (t_{11} + t_{22})^2,$$

was offenbar richtig ist. Wir wenden diese Ungleichung an auf die "Hessematrix" $T = |\nabla df|^2$. Ihre Verjüngung ist der Laplaceoperator. Es gilt also

$$|\nabla^2 f|^2 \geq \frac{1}{2}(\Delta f)^2.$$

Um die Schlüsselungleichung zu beweisen, genügt es demnach die folgende Gleichung zu beweisen:

6.4 Schlüsselgleichung. Für alle differenzierbaren Funktionen auf einer Sch Riemannschen Fläche gilt:

$$2\langle d\Delta f, df \rangle = \Delta |df|^2 - R|df|^2 - 2|\nabla^2 f|^2$$

Die Rechnungen sind ähnlich wie in 3.1 und könnten teilweise von dort übernommen werden. Wir beginnen mit der Berechnung der linken Seite in lokalen Koordinaten x_1, x_2 .

$$d\Delta f = \sum_{\nu} \partial_{\nu} \sum_{ij} \left(g^{ij} \partial_i \partial_j f - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k f \right) dx_{\nu}.$$

Die Schlüsselgleichung braucht nur in einem festen Punkt bewiesen werden. Die nun folgenden Gleichungen sollen so verstanden werden, dass sie nach Auswerten in diesem Punkt gültig sind. Dies gibt uns die Möglichkeit, das Koordinatensystem zu adaptieren. Wir wählen sogenannten Normalkoordinaten. Nach Auswerten in dem Punkt gilt somit

$$g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}, \quad \partial_k g_{ij} = 0, \quad \Gamma_{ij}^k = 0.$$

Selbstverständlich brauchen die zweiten Ableitungen von g und die Ableitungen von Γ nach Auswerten in dem Punkt nicht zu verschwinden. Nach Auswerten erhält man

$$\begin{aligned} d\Delta f &= \sum_{\nu} \left(\sum_i \partial_{\nu} \partial_i^2 f - \sum_k (\partial_{\nu} \Gamma_{ii}^k) \partial_k f \right) dx_{\nu} \\ &= \sum_{\nu i} \partial_{\nu} \partial_i^2 f dx_{\nu} - \sum_{\nu ik} (\partial_{\nu} \partial_i g_{ik} - \frac{1}{2} \partial_{\nu} \partial_k g_{ii}) \partial_k f dx_{\nu} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} &2 \langle d\Delta f, df \rangle = \\ (L) \quad &2 \sum_{ij} (\partial_i \partial_j^2 f) (\partial_i f) - 2 \sum_{\nu ik} (\partial_{\nu} \partial_i g_{ik}) (\partial_k f) (\partial_{\nu} f) + \sum_{\nu ik} (\partial_{\nu} \partial_k g_{ii}) (\partial_k f) (\partial_{\nu} f). \end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir den ersten Term der rechten Seite.

$$\sum_{ij} g^{ij} (\partial_i \partial_j - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k) \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} (\partial_{\mu} f) (\partial_{\nu} f).$$

Wir werten aus und setzen $g^{ij} = \delta_{ij}$ und $\Gamma_{ij}^k = 0$. Natürlich dürfen wir $\gamma^{\mu\nu}$ nicht durch $\delta^{\mu\nu}$ ersetzen, da vor dem Auswerten noch zweimal differenziert wird. Das Resultat ist also erst einmal

$$\sum_i \partial_i^2 \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} (\partial_{\mu} f) (\partial_{\nu} f).$$

Die Summe über μ, ν muss nun zweimal mittels der Produktregel differenziert werden, anschließend wird wieder ausgewertet. Das Resultat ist

$$(R1) \quad 2 \sum_{ij} (\partial_i \partial_j f)^2 + 2 \sum_{ij} (\partial_i f) (\partial_i \partial_j^2 f).$$

Wir kommen zum zweiten Term der rechten Seite $-R|df|^2$. Die skalare Krümmung ist $-2R_{1212}/\det g$. Die Standardformel für den Krümmungstensor ist

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l.$$

Nach Auswerten erhält man

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i \partial_k g_{jl} + \partial_j \partial_l g_{ik} - \partial_i \partial_l g_{jk} - \partial_j \partial_k g_{il}), \end{aligned}$$

im vorliegenden Flächenfall also

$$R = -2R_{1212} = -\partial_2^2 g_{22} + \partial_1^2 g_{11} + -2\partial_1 \partial_2 g_{12}.$$

Für den zweiten Term auf der rechten Seite folgt

$$(R2) \quad R|df|^2 = -(\partial_2^2 g_{22} + \partial_1^2 g_{11} - 2\partial_1 \partial_2 g_{12})((\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2).$$

Als letztes berechnen wir den dritten Term auf der rechten Seite. Wir schreiben

$$\nabla^2 f = \nabla df = \sum A_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

Wir erinnern an die Definition der Paarung von Tensoren

$$\langle dx_i \otimes dx_j, dx_\mu \otimes dx_\nu \rangle = \langle dx_i, dx_\mu \rangle \langle dx_j, dx_\nu \rangle.$$

Es gilt also

$$|\nabla^2 f|^2 = \sum_{ij\mu\nu} A_{i\mu} A_{j\nu} g^{i\mu} g^{j\nu}.$$

Jedenfalls gilt (nach Auswerten)

$$|\nabla^2 f|^2 = \sum_{ij} A_{ij}^2.$$

Wir kommen zur Berechnung von

$$A_{ij} = \nabla^2 f(\partial_i, \partial_j) = (\nabla_{\partial_i} df)(\partial_j).$$

Aus der allgemeinen Formel $(\nabla_A \omega)(B) = A\omega(B) - \omega(\nabla_A B)$ folgt

$$(\nabla_A df)(B) = ABf - (\nabla_A B)f.$$

Zusammen mit

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

folgt nun

$$A_{ij} = \partial_i \partial_j f - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k f.$$

Wir erhalten also

$$(R3) \quad 2|\nabla^2 f|^2 = 2 \sum_{ij} (\partial_i \partial_j f)^2 \quad (\text{nach Auswerten}).$$

Damit ist die Schlüsselgleichung klar. \square

Wendet man das Maximumprinzip auf 6.3 an, so folgt in Verbindung mit 4.2

6.5 Satz. Sei $g(t)$, $0 \leq t < b$, eine Lösung des normalisierten Ricci-Flusses, **Ank**
so gilt im Falle negativer mittlerer Krümmung r

$$|R - r| \leq Ce^{rt}.$$

mit einer nur von $g(0)$ abhängigen Konstanten C .

7. Abschätzung der ersten Ableitung der Krümmung

Wir wollen eine Differentialgleichung für $dR = \nabla R$ ableiten und auf sie das Maximumprinzip anwenden:

7.1 Lemma. *Es gilt*

Aak

$$\frac{\partial}{\partial t}|dR|^2 = \Delta|dR|^2 - 2|\nabla^2 R|^2 + (4R - 3r)|dR|^2.$$

Beweis. Die linke Seite ist

$$\frac{\partial}{\partial t}|dR|^2 = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{ij} g^{ij} \partial_i R \partial_j R = \sum_{ij} \dot{g}^{ij} \partial_i R \partial_j R + 2 \sum_{ij} g^{ij} \partial_i \dot{R} \partial_j R.$$

Nutzt man $\dot{g}^{ij} = (R - r)g^{ij}$ sowie $\dot{R} = \Delta R + R(R - r)$ aus, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|dR|^2 &= (R - r)|dR|^2 + 2\langle d\Delta R, dR \rangle + 2(2R - r)|dR|^2 \\ &= (5R - 3r)|dR|^2 + 2\langle d\Delta R, dR \rangle. \end{aligned}$$

Die behauptete Gleichung folgt nunmehr aus der Schlüsselgleichung. \square

In der Gleichung 7.1 schätzt man nun $4R - 3r = r + 4(R - r)$ nach oben ab durch $r/2$ und erhält bei beliebigem positiven ε für hinreichend große t die Ungleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}|dR|^2 \leq \Delta|dR|^2 + \frac{r}{2}|dR|^2.$$

Nun kann man das Maximumprinzip anwenden und erhält:

7.2 Satz. *Sei $g(t)$, $0 \leq t < b$, eine Lösung des normalisierten Ricciflusses, so gilt im Falle negativer mittlerer Krümmung r*

Ank

$$|dR|^2 \leq C e^{rt/2}.$$

mit einer nur von $g(0)$ abhängigen Konstanten C .

8. Abschätzung der höheren Ableitungen der Krümmung

Wir betrachten nun allgemeiner den Tensor $\nabla^k R$ für $k \geq 2$. Wir werden durch Induktion nach $k \geq 2$ folgendes beweisen:

8.1 Satz. Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$|\nabla^k R| \leq C_k e^{rt/2}.$$

HT

Dies wird induktiv geschehen. Genauer ist die Induktionsmechanismus wie folgt:

8.2 Lemma. Es gilt

wuE

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{\partial}{\partial t} |\nabla^k R|^2 = \Delta |\nabla^k R|^2 - 2|\nabla^{k+1} R|^2 + \Omega_k(t) \\ & \text{mit } |\Omega_k(t)| \leq A_k |\nabla^k R|^2 + B_k e^{rt/2}. \end{aligned}$$

sowie

$$\text{b)} \quad |\nabla^k R| \leq C_k e^{rt/2}.$$

Im Falle $k = 1$ folgt dies unmittelbar aus der exakten Gleichung 7.1 in Verbindung mit der Abschätzung 7.2 von dR . Als Induktionbeginn können wir $k = 1$ nehmen. Wir nehmen daher $k \geq 2$ an. Die Aussage sei für alle $l < k$ anstelle von k bewiesen. Wir müssen dann a) und b) für k beweisen. Wir nehmen an, dass a) für k bereits bewiesen sei und beweisen dann auch b) für k .

Zunächst eine Vorbemerkung: Man könnte geneigt sein, das Maximumprinzip direkt anzuwenden. Die Funktion $\Phi = |\nabla^k R|$ genügt ja einer Differentialgleichung der Art

$$\dot{\Phi} \leq \Delta \Phi + A\Phi + Br^{rt/2}.$$

Man hätte also die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{\Phi} = A\phi + Br^{rt/2}$$

zu betrachten. Die Lösung kein leicht explizit ermittelt werden. Leider wächst sie exponentiell an, wenn $A > 0$ ist. Wenn A jedoch negativ ist, klingt sie exponentiell ab. Der nun folgende Trick bewirkt eine Umkehrung des Vorzeichens von A .

Dazu wenden wir 8.2 zweimal an, für k und für $k-1$. Im Falle k verschenken wir den negativen Term $-2|\nabla^{k+1}R|^2$ und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^k R|^2 \leq \Delta|\nabla^k R|^2 + |\Omega_k(t)|$$

Im Falle $k-1$ verschenken wir den entsprechenden Term nicht.

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^{k-1}R|^2 = \Delta|\nabla^{k-1}R|^2 - 2|\nabla^k R|^2 + \omega_k(t)$$

Da wir $\nabla^{k-1}R$ dank der Induktionsvoraussetzung kontrollieren können, gilt

$$|\omega_k(t)| \leq D_k e^{rt/2}.$$

Der Trick ist es nun, die Größe

$$\Phi(t) := |\nabla^k R|^2 + K|\nabla^{k-1}R|^2$$

zu betrachten. Eine einfache Rechnung liefert

$$\dot{\Phi} - \Delta\Phi \leq -2K|\nabla^k R|^2 + |\Omega_k| + |\omega_k|.$$

Indem wir $2K$ durch K ersetzen, können wir $|\Omega_k|$ abfangen, sofern K groß genug gewählt wurde, was wir annehmen wollen und dürfen. Außerdem benutzen wir, dass die Differenz $\Phi(t) - |\nabla^k R|^2$ nach Induktionsvoraussetzung exponentiell abklingt und durch Vergrößerung der Konstanten D_k aufgefangen werden kann. Damit erhalten wir

$$\dot{\Phi} \leq \Delta\Phi - K\Phi + D_{k+1}e^{rt/2}.$$

Nun kann man das Maximumprinzip anwenden. Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{\Phi} = -K\Phi + D_{k+1}e^{rt/2}$$

klingt wie gewünscht ab. Die nun gewonnene Abschätzung für Φ liefert sofort die gewünschte Abschätzung für $|\nabla^k R|$, da dieser Term für $k-1$ anstelle von k ja nach Induktionsannahme unter Kontrolle ist.

Wir müssen nun noch 8.2, Teil a) beweisen, wobei wir b) für $l < k$ anstelle k annehmen dürfen. Wir beginnen mit

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^k R|^2 = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k}} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} (\nabla^k R)_{i_1, \dots, i_k} (\nabla^k R)_{j_1, \dots, j_k}$$

Wir leiten nach der Produktregel ab und benutzen

$$\dot{g}^{ij} = (R - r)g^{ij}.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla^k R|^2 = & k(R-r) |\nabla^k R|^2 + \\ & 2 \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k}} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} (\nabla^k R)_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^k R)_{j_1, \dots, j_k} \end{aligned}$$

Wir müssen

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^k R)_{i_1, \dots, i_k}$$

berechnen. Um den Gedanken klar hervortreten zu lassen, nehmen wir zunächst einmal $k = 2$ an. Wir erinnern an die Definition

$$(\nabla^2 R)_{ij} = (\nabla^2 R)(\partial_i, \partial_j) = (\nabla_{\partial_i} dR)(\partial_j) = \partial_i \partial_j R - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k R$$

und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 R)_{ij} = \partial_i \partial_j \dot{R} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \dot{R} - \sum_k \dot{\Gamma}_{ij}^k \partial_k R.$$

Man muss nun Produkte der Art

$$\dot{\Gamma}_{ij}^k (\partial_k R) (\partial_\mu \partial_\nu R), \quad \dot{\Gamma}_{ij}^k (\partial_k R) \Gamma_{\mu\nu}^l \partial_l R$$

untersuchen. Die Γ_{ij}^k werden aus g_{ij} und \dot{g}_{ij} und bleiben somit beschränkt. Für $\dot{\Gamma}_{ij}^k$ benötigt man eine Evolutionsgleichung und zwar rechnet man leicht in geodätischen Koordinaten nach:

$$\dot{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} (\partial_i h_{jl} + \partial_j h_{il} - \partial_l h_{ij}) \quad \text{mit} \quad h := \dot{g} = (r - R)g.$$

Damit sieht man, dass diese Produkte alle durch Ω_k in 8.2 abgefangen werden. Sie sind also für unsere Zwecke vernachlässigbar. Wir setzen $\dot{R} = (R-r)R + \Delta R$ ein und erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 R)_{ij} \sim (\nabla^2 \Delta R)_{ij}$$

Das Zeichen “ \sim ” deutet an, dass wir Terme weggelassen haben, die von $\Omega_k(t)$ absorbiert werden können und aus dem selben Grund können wir R durch r ersetzen. Der Term $(\partial_i R)(\partial_j R)$ ist ebenfalls vernachlässigbar, da die ersten Ableitungen unter Kontrolle sind. Wir erhalten damit im Falle $k = 2$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 R) \sim \nabla^2 \Delta R.$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass diese Formel auf beliebiges k zu übertragen. Dazu startet man mit der allgemein gültigen Formel

$$(\nabla A)(X_0, X_1, \dots, X_p) = X_0(A(X_1, \dots, X_p) - \sum_{\nu=1}^p A(X_1, \dots, X_{\nu-1}, \nabla_{X_0} X_\nu, X_{\nu+1}, \dots, X_p)),$$

oder in Komponentenschreibweise

$$(\nabla A)_{\beta, i_1, \dots, i_p} = \partial_\beta A_{i_1, \dots, i_p} - \sum_{\nu=1}^p \sum_{k=1}^n \Gamma_{\beta i_\nu}^k A_{i_1, \dots, i_{\nu-1}, k, i_{\nu+1}, \dots, i_p}.$$

Man nutzt diese für $A = \nabla^{k-1} R$ aus. Durch Induktion nach k leitet man nun

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^k R) \sim \nabla^k \Delta R$$

ab. Nun folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^k R| \sim 2 \langle \nabla^k \Delta R, \nabla^k R \rangle$$

Damit folgt Lemma 8.2 aus folgender asymptotischen Formel, welche anstelle der Schlüsselgleichung 6.4 tritt.

8.3 Schlüsselasympotik.

ScA

$$2 \langle \nabla^k \Delta R, \nabla^k R \rangle \sim \Delta |\nabla^k R|^2 - 2 |\nabla^{k+1} R|^2.$$

Für den Beweis benutzen wir folgende Formel:

8.4 Lemma. *Seien A ein kovariantes Tensorfeld auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Dann gilt* LkF

$$\Delta \langle A, A \rangle = 2 \langle \nabla A, \nabla A \rangle + 2 \langle \Delta A, A \rangle.$$

Hierbei bedeutet ΔA den rohen Laplace-Operator.

Zum Beweis rechnen wir aus, wie die kovariante Ableitung in Komponenten bezüglich eines Koordinatensystems aussieht: Wir benutzen wieder die Formel

$$(\nabla A)_{\beta, i_1, \dots, i_p} = \partial_\beta A_{i_1, \dots, i_p} - \sum_{\nu=1}^p \sum_{k=1}^n \Gamma_{\beta i_\nu}^k A_{i_1, \dots, i_{\nu-1}, k, i_{\nu+1}, \dots, i_p}.$$

Wir wollen die Komponenten von $\nabla^2 A$ berechnen (um durch Verjüngung dann ΔA zu bekommen). Dazu muss man in diese Formel ∇A anstelle von A eintragen. Das wird natürlich ein komplizierter Ausdruck. Erträglich wird er in Normalkoordinaten:

$$(\nabla^2 A)_{\alpha, \beta, i_1, \dots, i_p} = \partial_\alpha \partial_\beta A_{i_1, \dots, i_p} - \sum_{\nu=1}^p \sum_{k=1}^n (\partial_\alpha \Gamma_{\beta i_\nu}^k) A_{i_1, \dots, i_{\nu-1}, k, i_{\nu+1}, \dots, i_p}.$$

Diese Formel können wir weiter verwenden, solange sie nicht weiter differenziert wird. Durch Verjüngen ergibt sich

$$(\Delta A)_{i_1, \dots, i_p} = \sum_{\alpha} \partial_\alpha^2 A_{i_1, \dots, i_p} - \sum_{\alpha} \sum_{\nu=1}^p \sum_{k=1}^n (\partial_\alpha \Gamma_{\alpha i_\nu}^k) A_{i_1, \dots, i_{\nu-1}, k, i_{\nu+1}, \dots, i_p}.$$

und somit

$$\begin{aligned} \langle \Delta A, A \rangle &= \sum_{\alpha, i_1, \dots, i_p} (\partial_\alpha^2 A_{i_1, \dots, i_p}) A_{i_1, \dots, i_p} - \\ &\quad \sum_{\alpha, \nu, k, i_1, \dots, i_p} (\partial_\alpha \Gamma_{\alpha i_\nu}^k) A_{i_1, \dots, i_{\nu-1}, k, i_{\nu+1}, \dots, i_p} A_{i_1, \dots, i_p} \end{aligned}$$

Als nächstem wenden wir uns der Berechnung von $\Delta \langle A, A \rangle$ zu. Wir beginnen mit

$$\langle A, A \rangle = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p}} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} A_{i_1, \dots, i_p} A_{j_1, \dots, j_p}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \langle A, A \rangle &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p}} (\partial_\alpha (g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p})) A_{i_1, \dots, i_p} A_{j_1, \dots, j_p} + \\ &\quad 2 \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p}} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} (\partial_\alpha A_{i_1, \dots, i_p}) A_{j_1, \dots, j_p}. \end{aligned}$$

Wir differenzieren nochmals nach ∂_α :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^2 \langle A, A \rangle &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p}} (\partial_\alpha^2 (g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p})) A_{i_1, \dots, i_p} A_{j_1, \dots, j_p} + \\ &\quad 2 \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p}} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} (\partial_\alpha^2 A_{i_1, \dots, i_p}) A_{j_1, \dots, j_p} \\ &\quad 2 \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p}} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} (\partial_\alpha A_{i_1, \dots, i_p}) (\partial_\alpha A_{j_1, \dots, j_p}). \end{aligned}$$

Jetzt benutzen wir

$$\partial_\alpha g^{ik} = - \sum_{\alpha, \beta} g^{i\alpha} (\partial_\alpha g_{\alpha\beta}) g^{\beta k}.$$

Differenziert man nochmals nach x_ν , so folgt nach Auswerten

$$\partial_\alpha^2 g^{ik} = -\partial_\alpha^2 g_{ik},$$

also (ebenfalls nach Auswerten)

$$\partial_\alpha^2 (g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p}) = - \sum_n u \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_{k-1} j_{k-1}} \partial_\alpha^2 g_{i_k j_k} \delta_{i_{\nu+1} j_{\nu+1}} \dots \delta_{i_p j_p}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^2 \langle A, A \rangle &= \sum_{i_1, \dots, i_p, \nu, k} (\partial_\alpha^2 g_{i_\nu k}) A_{i_1, \dots, i_p} A_{i_1, \dots, i_{\nu-1}, k, i_{\nu+1}, \dots, i_p} + \\ &2 \sum_{i_1, \dots, i_p} (\partial_\alpha^2 A_{i_1, \dots, i_p}) A_{i_1, \dots, i_p} + \\ &2 \sum_{i_1, \dots, i_p} (\partial_\alpha A_{i_1, \dots, i_p})^2. \end{aligned}$$

Damit sehen wir

$$\begin{aligned} \Delta \langle A, A \rangle - 2 \langle \nabla A, \nabla A \rangle - 2 \langle \Delta A, A \rangle &= \\ \sum_{i_1, \dots, i_p, \nu, k, \alpha} (\partial_\alpha^2 g_{i_\nu k}) A_{i_1, \dots, i_p} A_{i_1, \dots, i_{\nu-1}, k, i_{\nu+1}, \dots, i_p} - \\ 2 \sum_{\alpha, \nu, k, i_1, \dots, i_p} (\partial_\alpha \Gamma_{\alpha i_\nu}^k) A_{i_1, \dots, i_{\nu-1}, k, i_{\nu+1}, \dots, i_p} A_{i_1, \dots, i_p} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck soll verschwinden. Dies ist äquivalent zu

$$\sum_\alpha \partial_\alpha^2 g_{ik} = \sum_\alpha \partial_\alpha (\Gamma_{\alpha i}^k + \Gamma_{\alpha k}^i),$$

was wiederum aus der allgemeinen Formel (nach Auswerten)

$$2\partial_\alpha \Gamma_{ij}^k = \partial_\alpha \partial_j g_{ik} + \partial_\alpha \partial_i g_{jk} - \partial_\alpha \partial_k g_{ij}$$

folgt. Damit ist Lemma 8.4 bewiesen. \square

Im Lichte dieses Lemmas erweist sich die Schlüsselasympotik äquivalent zu

8.5 Schlüsselasympotik, Variante.

ScV

$$\Delta \nabla^k R \sim \nabla^k \Delta R.$$

Genauer zeigen wir, dass die Komponenten bezüglich eines lokalen Koordinatensystemes der Differenz Linearkombination sind von Ausdrücken der Art PAB , wobei P ein Polynom in g_{ij} , $\det g$, A eine Komponente von $\nabla^\alpha R$ und B eine Komponenten von $\nabla^\beta R$ mit $\alpha + \beta = k$ sind.

9. Komplexe Struktur

Jeder zweidimensionale orientierte Euklidische Vektorraum besitzt eine wohldefinierte komplexe Struktur. Multiplikation mit i ist die Drehung um 90 Grad. Ist X eine zweidimensional orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, so besitzt insbesondere jeder Tangentialraum eine komplexe Struktur. Bekanntlich ist diese „integrierbar“, d.h. es existiert ein holomorpher Atlas \mathcal{O} , so dass Multiplikation mit i auf dem Tangentialraum oder allgemeiner Vektorfeldern durch

$$J(\partial/\partial x) = \partial/\partial y, \quad J(\partial/\partial y) = -\partial/\partial x$$

gegeben ist. Dabei sei $z = x + iy$ eine holomorphe Karte. Die Riemannsche Metrik hat nach Konstruktion die Eigenschaft $g(JX, JY) = g(X, Y)$. Sie ist somit von der Form

$$g = \begin{pmatrix} h(z) & 0 \\ 0 & h(z) \end{pmatrix}$$

mit einer positiven Funktion h . Wir wollen die kovariante Ableitung in holomorphen Koordinaten berechnen. Die allgemeinen Formeln für die Christoffelsymbole

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n g^{k\nu} \left[\frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{\nu j}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\nu} \right]$$

reduzieren sich auf

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log h}{\partial x} \\ \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log h}{\partial y} \end{aligned}$$

Die Standardformel für den Krümmungstensor

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l$$

vereinfacht sich zu

$$2R_{121}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \log h.$$

Es folgt

$$R = h \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \log h.$$

Als nächstes berechnen wir die kovarianten Ableitungen: Mit

$$H = \frac{1}{2} \log h, \quad H_x = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad H_y = \frac{\partial H}{\partial y}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial/\partial x}(\partial/\partial x) &= H_x\partial/\partial x - H_y\partial/\partial y \\ \nabla_{\partial/\partial x}(\partial/\partial y) &= H_y\partial/\partial x + H_x\partial/\partial y \\ \nabla_{\partial/\partial y}(\partial/\partial x) &= H_y\partial/\partial x + H_x\partial/\partial y \\ \nabla_{\partial/\partial y}(\partial/\partial y) &= -H_x\partial/\partial x + H_y\partial/\partial y\end{aligned}$$

Mit Hilfe der allgemeinen Formel

$$(\nabla_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$$

verifiziert man nun

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial/\partial x}dx &= -H_xdx - H_ydy \\ \nabla_{\partial/\partial y}dx &= -H_ydx + H_xdy \\ \nabla_{\partial/\partial x}dy &= H_ydx - H_xdy \\ \nabla_{\partial/\partial y}dy &= -H_xdx - H_ydy\end{aligned}$$

Wir rechnen die Formeln auf komplexe Koordinaten um,

$$dz := dx + idy, \quad d\bar{z} := dx - idy, \quad \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Man errechnet

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial/\partial x}dz &= (-H_xdx - H_ydy) + i(H_ydx - H_xdy) \\ \nabla_{\partial/\partial y}dz &= (-H_ydx + H_xdy) + i(-H_xdx - H_ydy) \\ \nabla_{\partial/\partial x}d\bar{z} &= (-H_xdx - H_ydy) - i(H_ydx - H_xdy) \\ \nabla_{\partial/\partial y}d\bar{z} &= (-H_ydx + H_xdy) - i(-H_xdx - H_ydy)\end{aligned}$$

und folgert

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial/\partial z}dz &= 2H_zdz \\ \nabla_{\partial/\partial z}d\bar{z} &= 0 \\ \nabla_{\partial/\partial \bar{z}}dz &= 0 \\ \nabla_{\partial/\partial \bar{z}}d\bar{z} &= -2H_{\bar{z}}d\bar{z}\end{aligned}$$

Wir berechnen nun die kovarianten Ableitungen eines Monoms

$$Z(a, b) = dz^{a_1} d\bar{z}^{b_1} \dots dz^{a_m} d\bar{z}^{b_m}$$

aus. Dabei seien a_i, b_j nicht negative ganze Zahlen. Die Produkte sind im Sinne der Tensorprodukts zu verstehen. Aus der Produktregel für die kovariante Ableitung folgt mit $\alpha = a_1 + \dots + a_m$ und $\beta = b_1 + \dots + b_m$

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial/\partial z}Z(a, b) &= -2\alpha H_z Z(a, b) \\ \nabla_{\partial/\partial \bar{z}}Z(a, b) &= -2\beta H_{\bar{z}} Z(a, b)\end{aligned}$$

Hieraus kann man

$$\nabla Z(a, b) = -2\alpha H_z dz \otimes Z(a, b) - 2\beta H_{\bar{z}} d\bar{z} \otimes Z(a, b)$$

folgern. Ist f eine Funktion, so folgt nun allgemeiner mittels der Produktregel

$$\nabla(fZ(a, b)) = df \otimes Z(a, b) + f\nabla Z(a, b).$$

Trägt man $df = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}$ ein, so folgt die allgemeine Formel für die kovariante Ableitung kovarianter Tensoren:

$$\begin{aligned} \nabla(fZ(a, b)) = & (f_z - 2\alpha f H_z) dz \otimes Z(a, b) + \\ & (f_{\bar{z}} - 2\beta f H_{\bar{z}}) d\bar{z} \otimes Z(a, b) \end{aligned}$$

Diese Formel muss zweimal angewendet werden. Das Resultat ist eine Vier-Terme-Formel mit den Monomen

$$dz \otimes dz \otimes Z(a, b), \quad dz \otimes d\bar{z} \otimes Z(a, b), \quad d\bar{z} \otimes dz \otimes Z(a, b), \quad d\bar{z} \otimes d\bar{z} \otimes Z(a, b).$$

Um den rohen Laplace-Operator zu bekommen, muss man die ersten beiden Komponenten verjüngen. Die Verjüngung ist

$$\begin{aligned} V(dz \otimes dz) &= (dz, dz) = 0, & V(d\bar{z} \otimes d\bar{z}) &= (d\bar{z}, d\bar{z}) = 0, \\ V(dz \otimes d\bar{z}) &= (dz, d\bar{z}) = 2h(z)^{-1}, & V(d\bar{z} \otimes dz) &= (d\bar{z}, dz) = 2h(z)^{-1} \end{aligned}$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \Delta(fZ(a, b)) = & 2h(z)^{-1} \{ (f_z - 2\alpha f H_z)_{\bar{z}} - 2\beta (f_z - 2\alpha f H_z) H_{\bar{z}} + \\ & (f_{\bar{z}} - 2\beta f H_{\bar{z}})_z - 2\alpha (f_{\bar{z}} - 2\beta f H_{\bar{z}}) H_z \} Z(a, b) \end{aligned}$$

Diese Formel wird besonderes einfach in Normalkordinaten. In jedem Punkt gibt es bekanntlich eine holomorphe Karte, so dass h in diesem Punkt gleich eins wird und die ersten Ableitungen von h in diesem Punkt verschwinden. (Jede komplex analytische Mannigfaltigkeit der Dimension eins mit einer Hermiteschen Metrik ist Kählersch). Nach Auswerten in dem betreffenden Punkt erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta(fZ(a, b)) &= 4(f_{z\bar{z}} - (\alpha + \beta)f H_{z\bar{z}}) Z(a, b) \\ &= 4\left(f_{z\bar{z}} - \frac{\alpha + \beta}{2} f h_{z\bar{z}}\right) Z(a, b) \end{aligned}$$

Wir spalten nun die kovariante Ableitung auf:

$$\nabla = \nabla' + \nabla''$$

$$\begin{aligned}\nabla'(fZ(a,b)) &= (f_z - 2\alpha f H_z) dz \otimes Z(a,b) \\ \nabla''(fZ(a,b)) &= (f_{\bar{z}} - 2\beta f H_{\bar{z}}) d\bar{z} \otimes Z(a,b)\end{aligned}$$

Man muß verifizieren, dass diese Operatoren gegenüber holomorphem Koordinatenwechsel invariant sind. Es gelten die Produktregeln

$$\nabla'(fT) = \nabla'(f) \otimes T + f\nabla'T, \quad \nabla''(fT) = \nabla''(f) \otimes T + f\nabla''T.$$

Bei den weiteren Rechnungen nehmen wir an, dass das Monom $Z(a,b)$ nicht mit $d\bar{z}$ beginnt. Es beginnt also mit dz oder ist leer. Dann modifizieren wir die Operatoren ∇' und ∇'' und definieren

$$D := \nabla'. \quad \bar{D} := V \circ \nabla''.$$

Dabei bedeute V der Verjüngung der ersten beiden Komponenten, wenn zwei vorhanden sind und den Nulloperator sonst. Unter der an das Monom $Z(a,b)$ gemachten Voraussetzung verifiziert für $T = fZ(a,b)$ man leicht in Normalkoordinaten die Formeln

$$\begin{aligned}D\bar{D}T + \bar{D}DT &= \Delta T \\ D\bar{D}T - \bar{D}DT &= -\frac{1}{2}(\alpha - \beta)RT.\end{aligned}$$

Damit erhält man mit $k = \alpha - \beta$

$$\begin{aligned}D\Delta T - \Delta DT &= DD\bar{D}T + D\bar{D}DT - D\bar{D}DT - \bar{D}DDT \\ &= (DD\bar{D}T - D\bar{D}DT) + (D\bar{D}DT - \bar{D}DDT) \\ &= -\frac{1}{2}kD(RT) - \frac{1}{2}(k+1)RDT \\ &= -\frac{1}{2}k(DR) \otimes T - \left(k + \frac{1}{2}\right)RDT\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\bar{D}\Delta T - \Delta\bar{D}T &= \bar{D}D\bar{D}T + \bar{D}\bar{D}DT - D\bar{D}\bar{D}T - \bar{D}D\bar{D}T \\ &= (\bar{D}D\bar{D}T - D\bar{D}\bar{D}T) + (\bar{D}\bar{D}DT - \bar{D}D\bar{D}T) \\ &= \frac{1}{2}(k-1)R\bar{D}T + \frac{1}{2}k\bar{D}(RT) \\ &= \left(k - \frac{1}{2}\right)R\bar{D}T + \frac{1}{2}k(\bar{D}R) \otimes T\end{aligned}$$

Wir erinnern daran, dass \bar{D} die Zusammensetzung von ∇'' mit einer Verjüngung ist. Nach unserer Annahme, dass $Z(a,b)$ nicht mit $d\bar{z}$ beginnt, ist dies immer eine Verjüngung eines dz mit einem $d\bar{z}$. Der Laplaceoperator vertauscht mit Verjüngungen (da die kovariante Ableitung mit Verjüngungen vertauscht). Daher ist $\Delta\bar{D}T$ die entsprechende Verjüngung von $\Delta\nabla''$. Da bei Verjüngungen

dieser Art von monomialen Tensoren keine Information verloren geht, erhalten wir nun zwei Formeln,

$$\begin{aligned}\nabla' \Delta T - \Delta \nabla' T &= -\frac{1}{2}k(\nabla' R) \otimes T - \left(k + \frac{1}{2}\right)R\nabla' T \\ \nabla'' \Delta T - \Delta \nabla'' T &= \frac{1}{2}k(\nabla'' R) \otimes T + \left(k - \frac{1}{2}\right)R\nabla'' T\end{aligned}$$

Wir addieren beide Formeln und erhalten einen Ausdruck für $\nabla\Delta - \Delta\nabla$ angewendet auf Tensoren T . Nutzt man dies für $T = \nabla^{k-1}R$ aus, so folgt induktiv die Schlüsselasymptotik 8.5.