Integration (handgestrickt)

$$\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \quad f \text{ stetig, Träger}(f) \text{ beschränkt}\}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^n) := \{\ & f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \\ & \text{a) } f \text{ beschränkt,} \\ & \text{b) Träger}(f) \text{ beschränkt,} \\ & \text{c) es existiert Folge } f_m \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \text{ mit } f_m \uparrow f.\ \}\end{aligned}$$

Dabei bedeutet $f_m \uparrow f$, dass f_m monoton wächst und gegen f punktweise konvergiert.

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) := \{f; \quad \text{es existieren } g, h \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^n) \text{ mit } f = g - h\}.$$

Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$, so definiert man

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und mit dieser Bezeichnung

$$\mathcal{J}(D) := \{f : D \to \mathbb{R}; \quad \tilde{f} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Man definiert das Integral $I(f)$ für $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ durch

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

(iteriertes Integral einer Variablen). Man dehnt I aus auf $\mathcal{B}^+(\mathbb{R}^n)$ durch

$$I(f) := \lim_{m \to \infty} I(f_m)$$

und auf $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$I(f) = I(g) - I(h).$$

Man hat zu zeigen, dass diese Definitionen unabhängig von der Wahl der Folge f_m beziehungsweise von der Wahl von g und h sind. Schließlich definiert man

$$I(f) = I(\tilde{f}), \quad \text{für} \quad f \in \mathcal{J}(D)$$

und verwendet dafür die suggestive Schreibweise

$$\int_D f(x) dx = I(f).$$

Grundlegende Eigenschaften

$\mathcal{J}(D)$ ist ein Vektorraum, das Integral ist linear und positiv, das letztere bedeutet „$f \geq 0 \implies I(f) \geq 0$“. Außerdem gilt der *Satz von Fubini,* d.h.: Sei $f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für festes $x_2, \ldots, x_n$ in $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ und $\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1$ liegt in $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{n-1})$. Man kann daher dieses Integral über x_2 integrieren, u.s.w. und es gilt

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

(n-faches eindimensionales Integral).

Reichhaltigkeit

Man kann zeigen:

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f : U \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig, so gilt $f \in \mathcal{J}(U)$.
Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt $f \in \mathcal{J}(K)$.

Transformationsformel

Sei $\varphi : D \to D'$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei offenen beschränkten Teilen des $\mathbb{R}^n$ und $f \in \mathcal{J}(D')$. Die Funktionaldeterminante von φ sei beschränkt in D. Dann ist $x \mapsto f(\varphi(x))|\det J(\varphi, x)|$ in $\mathcal{J}(D)$ enthalten und es gilt

$$\int_D f(\varphi(x)|\det J(\varphi, x)|dx = \int_{D'} f(y)dy.$$

Damit ist dieses Integral für alle praktischen Belange, insbesondere die Berechnung von Volumina ($\mathrm{vol}(D) := \int_D dx$) völlig ausreichend. Man hat also das Volumen von beliebigen kompakten und beschränkten offenen Mengen definiert. Aus dem Satz von Fubini folgt, dass man Volumina stets induktiv nach dem Cavalierischen Prinzip berechnen kann (Zerschneiden in $(n-1)$-dimensionale Scheiben und „Aufsummieren“ deren $(n-1)$-dimensionale Volumina per Integration.)

Nachteil

Es gelten keine guten Stabilitätseigenschaften bei Grenzübergängen. Dazu sollte man die größere Klasse der Lebesgue-integrierbaren Funktionen einführen. Das bedeutet mehr Aufwand, man muss in der Definition der Baireschen Klasse auf die Beschränktheitsvoraussetzungen verzichten und die „richtige“ Bairsche Klasse $\mathcal{B}^+$ einführen. Lebesgue-integrierbare Funktionen lassen sich nur außerhalb einer Menge vom Maß Null als Differenz Bairescher Funktionen schreiben. Dies bedingt weitere Schritte bei der Konstruktion der Klasse der Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

Zu den Beweisen

Das Integral auf $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})^n$

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

ist nur scheinbar uneigentlich. Es ist ein Spezialfall des Integrals

$$I(f) = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

für stetige Funktionen auf einem Quader

$$f : Q \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Was man wissen muss, ist, dass man stetige Funktionen einer Variablen auf einem abgeschlossenen Intervall integrieren kann und dass nach Ausführung der Integration über x_1 die Funktion in den restlichen Variablen $x_2, \dots, x_n$ stetig bleibt. Dies ist eine einfache Anwendung des Satzes von der gleichmäßigen Stetigkeit.

Der entscheidende Punkt bei dem vorgeschlagenen Zugang ist die Wohldefiniertheit des Integrals auf $\mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^n)$. Man zeigt etwas mehr (und beweist dann gleichzeitig die Positivität mit), nämlich

Seien $f, g \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^n)$ und $f_m, g_m \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_m \uparrow f$, $g_m \uparrow g$. Es gelte $f \geq g$. Dann gilt

$$\lim_{m\to\infty} I(f_m) \geq \lim_{m\to\infty} I(g_m).$$

(Die Existenz der beiden Limiten sollte klar sein.)

Der Beweis ist kurz aber etwas trickreich. Man hält zunächst einen Index m_0 fest und stellt fest:

$$g_{m_0} - f_m \wedge g_{m_0} \downarrow 0.$$

An dieser Stelle greift der *Satz von Dini,*, welcher besagt, dass eine eine Folge $h_m \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $h_m \downarrow 0$ sogar gleichmäßig konvergiert. Hieraus folgt nun

$$\lim_{m\to\infty} I(f_m) \geq \lim_{m\to\infty} I(f_m \wedge g_{m_0}) = I(g_{m_0}).$$

Da m_0 beliebig war, folgt nun

$$\lim_{m\to\infty} I(f_m) \geq \lim_{m\to\infty} I(g_m).$$

Die Wohldefiniertheit des Integrals auf $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ ist nun eine Banalität. Sei $f = g_1 - h_1 = g_2 - h_2$ mit steigen Funktionen mit kompaktem Träger g_1, g_2, h_1, h_2. Dann gilt $g_1 + h_2 = g_2 + h_1$. Offenbar ist I auf $\mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^n)$ additiv, also z.B. $I(g_1) + I(h_2) = I(g_1 + h_1)$. Hieraus folgt $I(g_1) - I(h_1) = I(g_2) - L(h_2)$ und somit die Wohldefiniertheit.

Beweis der Reichhaltigkeit

Man benötigt folgende Eigenschaft der Baireschen Klasse:

Sei $f_m \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^m)$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass sie monoton wachsend gegen eine beschränkte Funktion f mit beschränktem Träger konvergiert. Dann gilt auch $f \in \mathcal{B}^+(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Man betrachte für jedes m Folgen

$$f_{m\nu} \uparrow f_m \quad (\nu \to \infty)$$

und bildet dann die Folge

$$F_m(x) := \max_{\mu+\nu=m} f_{\mu\nu}(x).$$

Offenbar sind dies stetige Funktionen mit kompaktem Träger und es gilt $f_m \uparrow f$.

Nun zur Reichhaltigkeit. Die charakteristische Funktion $\chi_{(a,b)}$ kann man leicht monoton wachsend durch eine Folge von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger approximieren (man nehme Trapezfunktionen). Sie ist also in $\mathcal{B}_b^+(\mathbb{R})$ enthalten. Eine leichte Verallgemeinerung besagt, dass die charakterstische Funktion eines offenen (achsenparallenen) Quaders in $\mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^n)$ enthalten ist. Sei nun U eine beliebige offene beschränkte Menge. Ein offener Quader $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ heißt *rational,* falls alle a_i, b_i rational sind. Aus der Tatsache, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, folgt, dass man U durch rationale Quader überdecken kann. Da $\mathbb{Q}$ und damit die Menge der rationalen Quader abzählbar ist, existiert somit eine Folge von offenen Quadern mit

$$U = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots.$$

Dies kann man auch in der Form

$$\chi_{Q_1}, \chi_{Q_1} \vee \chi_{Q_2}, \chi_{Q_1} \vee \chi_{Q_2} \vee \chi_{Q_3} \cdots \uparrow \chi_U$$

schreiben. Aus trivialen Gründen gilt allgemein

$$f, g \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f \wedge g,\ f \vee g \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^n).$$

Damit ist gezeigt, dass χ_U in $\mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^n)$ enthalten ist. Man kann nun allgemeiner zeigen, dass für jede stetige und beschränkte Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ die durch 0 fortgesetzte Funktion $\tilde{f}$ in $\mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^n)$ enthalten ist, sofern $f \geq 0$. Dazu wählt man eine Folge $f_m \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_m \uparrow \chi_U$. Man kann $f_m \geq 0$ annehmen, da man ansonsten f_m durch $f_m^+ = f_m \vee 0$ ersetzen kann. Es ist leicht zu sehen, dass $f_m \tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ stetig und damit in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ enthalten ist. Es gilt $f_m \uparrow \tilde{f}$ und somit $\tilde{f} \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^n)$ wie behauptet. Ist f eine beliebige stetige und beschränkte Funktion auf U, so kann man sie in einen positiven und negativen Teil zerlegen, $f = f^+ - f^-$ und erhält so $f \in \mathcal{J}(U)$.

Vergleich mit dem Regelintegral

Im folgenden sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge auf der Funktion konstant 1 integrierbar ist. Man nennt

$$v_n(A) := \int_A dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)dx$$

das n-dimensional Volumen von A. Beispielsweise haben beschränkte offene und kompakte Mengen ein Volumen. Sei $f \in \mathcal{J}(A)$. Dann gilt offenbar die Standardabschätzung

$$\left| \int_A f(x)dx \right| \leq v_n(A)||f||.$$

Hieraus folgt: Ist $f_m \in \mathcal{J}(A)$ eine Folge, welche gleichmäßig gegen f konvergiert und gilt auch $f \in \mathcal{J}(A)$, so gilt

$$\lim_{m \to \infty} \int_A f_m(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

Hieraus kann man leicht folgern: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, welche auch in $\mathcal{J}([a,b])$ enthalten ist, so stimmen das alte Regelintegral und das neu konstruierte überein.

Vernachlässigbare Mengen

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge,* falls die Funktion konstant eins integrierbar ist und falls $v_n(A) = 0$ gilt. Jede Menge, welche aus nur einem Punkt besteht, ist eine Nullmenge, da man sie in einen Quader beliebig kleiner Kantenlängen einsperren kann. Aus dem Satz von Fubini folgt allgemeiner, dass niederdimensionale Quader wie beispielsweise

$$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_k, b_k], \quad k < n,$$

Nullmengen sind. Man überlegt sich leicht, dass endliche Vereinigungen von Nullmengen ebenfalls Nullmengen sind.

Wer den Begriff der Untermannigfaltigkeit kennt, kann nun mittels der Transformationsformel beweisen:

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte d-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit $d < n$. Dann ist K eine n-dimensionale Nullmenge.

Beispielsweise ist die Oberfläche der Kugel eine dreidimensionale Nullmenge. Man könnte darauf hoffen, dass allgeminer der Rand einer offenen beschränkten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ eine n-dimensionale Nullmenge ist. Doch dies ist im Allgemeinen falsch. Für einigermaßen anständige“ U sollte dies aber immer richtig sein.