Prüfung zu „Unitäre Darstellung der Poincaregruppe“.

Wissenschaftliches Gespräch über folgende Themen. Es geht um Begriffe und Fakten, weniger Beweise.

Normierte Räume

Normierte Räume (es genügt immer über $\mathbb{C}$), Banachräume, beschränkte (stetige) lineare Abbildung zwischen mormierten Räumen, ihre Norm, der Raum der beschränkten Operatoren $\mathcal{B}(E, F)$ zwischen zwei normierten Räumen E, F ist selbst ein normierter Raum. Dies ist sogar ein Banachraum, wenn F ein Banachraum ist. Spezialfall. Der Dualraum $E' = \mathcal{B}(E, \mathbb{C})$ ist ein Banachraum.

Wir schreiben abkürzend $\mathcal{B}(E) = \mathcal{B}(E, E)$. Die Menge der invertierbaren Elemente von $\mathcal{B}(E)$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{B}^*(E) = \{A \in \mathcal{B}(E);\ A^{-1} \in \mathcal{B}(E)\}.$$

Nach dem „open mapping theorem“ (eine stetige lineare surjektive Abbildung zwischen zwei Banachräumen isf offen) ist jede bijektive Abbildung $A : E \to E$ aus $\mathcal{B}(E)$ sogar in $\mathcal{B}^*(E)$ enthalten. Die Umkehrabbildung ist also automatisch stetig.

Der *Satz von Hahn Banach* in der Standardform:

Sei F ein Unterverektorraum eines normierten Raumes E. Man kann jede stetige Linearform auf F auf ganz E (stetig linear, sogar normerhaltend) fortsetzen.

Andere Formulierung: *Die natürliche Abbildung $E \to E''$ is normerhaltend und insbesondere injektiv.* (Dies ergibt einen Nicht-Standardbeweis, dass jeder normierte Vektorraum Unterraum eines Banachraums ist.)

Hilberträume

(Immer komplex), die Existenz des orthogonalen Komplements, der Satz von Riesz. Hilbertraumsumme einer Schar paarweise orthogonaler Unterräume. Hilbertraumbasis, Separabilität.

Radonmaße

Begriff des Radonmaßes. Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Toplogie. Ein Radonmaß dx ist ein lineares Funktional

$$I : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \longmapsto I(f) = \int_X f(x)dx,$$

mit den Eigenschaften $I(\bar{f}) = \overline{I(f)}$ und $I(f) \geq 0$ für reelles $f \geq 0$.

Integrationstheorie als Vervollständigung von $\mathcal{C}_c(X)$, genauer, vom Faktorraum nach dem Unterraum der Nullfunktionen aus $\mathcal{C}_c(X)$. Ungefähre Beschreibung: Was ist eine integrierbare Funktion, was ist eine Nullfunktion bzw. Nullmenge, was ist eine messbare Funktion, was ist eine messbare Menge? Abgeschlossene und offene Teilmengen sind messbar. Borelsche Mangen sind messbar. (Eine Teilmenge M eines topologischen Raumes heißt Borelsch, wenn sie sich durch die Operationen „Vereinigung“ und „Durchschnitt“ aus abzählbar vielen offenen und abgeschlossenen Teilmengen gewinnen läßt.)

Wie definiert man $\mathcal{L}^p$ und L^p? L^p ist ein Banachraum, am wichtigsten ist L^2. Dies ist sogar ein Hilbertraum.

Das Bochner-Integral

Sei (X, dx) eine Radonmaß und E ein Banachraum. Dann existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\mathcal{C}_c(C, E) \longrightarrow E, \quad f \longmapsto \int_X f(x)dx,$$

so dass für jedes stetige lineare Funktional $L : E \to \mathbb{C}$

$$L\Big(\int_X f(x)dx\Big) = \int_X L(f(x))dx$$

gilt.

Die Eindeutigkeit folgt aus dem Satz von Hahn-Banach. Die Existenz ist klar, wenn E ein Hilbertraum ist. Sie folgt dann aus dem Satz von Riesz. Die Formel lautet

$$\Big\langle \int_X f(x)dx, h \Big\rangle = \int_X \langle L(f(x)), h\rangle dx$$

Man kann den Begriff der meßbaren Funktion $f : X \to E$ definieren. Besonders einfach ist dies, wenn E separabel ist. Dies wird in unseren Anwendungen immer der Fall sein und wird daher im folgenden vorausgesetzt. Dann ist f messbar genau dann, wenn $L \circ f$ für jede stetige Linearform L messbar ist. Auch den Begriff der Nullfunktion kann man definieren. Man nennt $f : X \to E$ eine Nullfunktion, wenn es eine Nullmenge in X gibt, in deren Komplement f verschwindet. Damit hat man wieder die Möglichkeit, die Räume $\mathcal{L}^p(X, E, dx)$ und $L^p(X, E, dx)$ zu definieren. $L^p(X, E, dx)$ ist ein Banachraum. Im Falle, dass $p = 2$ und dass $E = H$ ein Hilbertraum ist, ist es sogar ein Hilbertraum.

Das Produktmaß

Seien (X, dx), (Y, dy) zwei Radonmaße. Dann kann man auf $X \times Y$ (versehen mit der Produkttopologie) ein Produktmaß folgendermaßen definieren. Sei $f \in \mathcal{C}_c(X \times Y)$. Dann kann man für festes y die Funktion $x \to f(x, y)$ betrachten. Diese ist stetig und hat kompakten Träger. Man kann also $\int_X f(x, y)dx$ bilden.

Dies ist eine Funktion von y. Mit Hilfe des Satzes von der gleichmäßigen Stetigkeit kann man zeigen, dass diese Funktion in $\mathcal{C}_c(Y)$ enthalten ist. Man kann sie integrieren und erhält so ein Radonmaß, das sogenannte Produktmaß.

$$\int_{X\times Y} f(x,y)dxdy := \int_Y \Big[\int_X f(x,y)dx\Big]dy.$$

Man hätte auch zuerst über y und dann über x integrieren können. Tatsächlich gilt

$$\int_Y \Big[\int_X f(x,y)dx\Big]dy = \int_Y \Big[\int_Y f(x,y)dy\Big]dx.$$

Für zerfallende Funktionen $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ ($f_1 \in \mathcal{C}_c(X)$, $f_1 \in \mathcal{C}_c(X)$) ist dies trivial. Der allgemeine Fall kann aus dem Weierstraß'schen Approximationssatz gefolgert werden.

Das Haar-Maß

Existenz und Eindeutigkeit des Haarmaßes (kein Beweis), Modularfunktion,

$$\int_G f(xg)dx = \Delta_G(g)\int_G f(x)dx,$$

unimodulare Gruppe ($\Delta_G = 1$). Beispiele unimodularer Gruppen (kompakte, abelsche, diskrete, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$). Beispiel einer nicht unimodularen Gruppe

$$P = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},\ a > 0, b \in \mathbb{R}\}, \quad \Delta_P(M) = a^2.$$

Quotientenmaß auf $P\backslash G$, rechtsinvariant, nur unter der Voraussetzung $\Delta_G|P = \Delta_P$. Keine Beweise, aber Kenntnis der (definierenden) Formel

$$\boxed{\int_G f(x)dx = \int_{P\backslash G}\int_P f(px)dpdx}$$

Begriff der Darstellung

Operation einer Gruppe G auf einer Menge X von links, $f : G \times X \to X$ oder von rechts $f : X \times G \to X$. (Beide Begriffe sind mittels des Antiautomorphimus $g \mapsto g^{-1}$ ineinander überführbar). Wir betrachten meist Operationen von links. Jede solche Operation induziert einen Homomorphismus

$$G \longrightarrow \mathrm{Bij}(X),$$

(und umgekehrt), wobei $\mathrm{Bij}(X)$ die Gruppe der bijektiven Selbstabbildungen von X bezeichnet.

Ist $X = V$ ein Vektorraum, und sind die Transformationen im Bild von $G \longrightarrow \mathrm{Bij}(V)$ linear, so spricht man von einer Darstellung. Eine Darstellung kann man wahlweise durch die Abbildung $G \times V \to V$ oder den Homomorphismus $G \to \mathrm{GL}(V)$ beschreiben.

Sei G eine topologische Gruppe (bei uns immer eine lokal kompakte Gruppe) und V ein topologischer Vektorraum (bei uns immer ein Banachraum, häufig sogar ein Hilbertraum), so heißt die Darstellung stetig, falls $G \times V \to V$ stetig ist. Dabei trage $G \times V$ die Produkttopologie. Wenn V ein Banachraum ist, spricht man von einer Banachdarstellung.

Eine Banachdarstellung heißt unitär, falls $V = H$ sogar ein Hilbertaum ist und falls das Bild von $G \to \mathcal{B}^*(H)$ aus unitären Operatoren besteht. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Un}(H)$ die Gruppe der unitären Operatoren auf H. Eine unitäre Darstellung kann also als Homomorphismus $G \to \mathrm{Un}(H)$ gelesen werden.

Das fundamentale Beispiel einer unitären Darstellung. Die Gruppe G operiert auf $L^2(H\backslash G)$, G und H beide unimodular, durch Translation von rechts,

$$G \times L^2(H\backslash G) \longrightarrow L^2(H\backslash G), \quad (g, f(x)) \longmapsto f(xg).$$

Dies ist ein Spezialfall der (unitär) induzierten Darstellung, die wir später behandeln werden. Besonders wichtig $H = \{e\}$. Diese Darstellung heißt die *reguläre Darstellung*

Der Begriff des (Banach-)Isomorphismus von zwei Banachdarstellungen sollte klar sein. Sind $G \to \mathrm{Un}(H_1)$ und $G \to \mathrm{Un}(H_2)$ zwei unitäre Darstellungen, so hat man zu unterscheiden zwischen einem Banachisomorphismus und einem unitären Isomorphismus.

Faltungsalgebra

Sei G eine lokal kompakte Gruppe mit Haarschem Maß dx. Die Faltung zweier Funktionen $f, g \in \mathcal{C}_c(G)$ ist definiert durch

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy.$$

Die Faltung definiert ein assoziatives Produkt auf $\mathcal{C}_c(G)$. Ausdehnung einer Darstellung $\pi : G \to \mathcal{B}^*(H)$ auf die Faltungsalgebra durch die Formel

$$\pi(f) := \int_G f(x)\pi(x)dx.$$

Diese Formel bedeutet

$$\pi(f)h = \int_G f(x)\pi(x)hdx$$

und diese Formel wiederum bedeutet

$$L(\pi(f)h) = \int_G L(f(x)\pi(x))dx \quad \text{für } L \in H'.$$

Ist H eine Hilbertraum, so bedeutet diese Formel

$$\langle \pi(f)h, h' \rangle = \int_G \langle f(x)\pi(x)h, h' \rangle dx.$$

Wichtig ist, dass man jedes $\pi(x)$ durch Operatoren aus der Faltungsalgebra approximieren kann. Beispielsweise ist $\mathrm{id} = \pi(e) = \lim \pi(\delta_n)$, wobei (δ_n) eine Diracfolge ist.

Sternalgebra

Eine $*$-Algebra ist eine assoziative Algebra A (nicht notwendig mit Eins) zusammen mit einer Abbildung $A \to A$, $a \mapsto a^*$, mit den Eigenschaften

$$a^{**} = a, \quad (a \pm b)^* = a^* \pm b^*, \quad (Ca)^* = \bar{C}a^*, \quad (ab)^* = b^* a^*.$$

Beispiele von $*$-Algebren sind:

1) Sei G eine lokal kompakte Gruppe

$$\mathcal{C}_c(G), \quad f^*(x) =:= \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}.$$

2) Sei H ein Hilbertraum. Dann ist $\mathcal{B}(H)$ eine Sternalgebra, A^* ist der adjungierte Operator $\langle Aa, b \rangle = \langle a, A^* b \rangle$.

Unter einer Darstellung einer Algebra A auf einem Vektorraum versteht man einen Homomorphismus $A \to \mathrm{End}(V)$.

Ist A eine $*$-Algebra und H ein Hilbertraum, so kann man den Begriff der Sterndarstellung definieren. Dies ist ein Homomorphismus $A \to \mathcal{B}(H)$, welcher mit den Sternstrukturen verträglich ist. Außer, dass das Bild von A aus stetigen Operatoren besteht, hat man keine weitere topologische Bedingung.

Ist $\pi : G \to \mathcal{B}^*(U)$ eine Banachdarstellung, so induziert diese eine Algebrendarstellung $\mathcal{C}_c(G) \to \mathcal{B}(E)$. Dies ist sogar eine Sterndarstellung, wenn π unitär ist.

Begriff der algebraischen Irreduzibilität einer Darstellung einer Gruppe oder einer Algebra. (Außer 0 und dem ganzen Raum gibt es keinen invarianten Unterraum.)

Begriff der topologischen Irreduzibilität.

Einige allgemeine Fakten über unitäre Darstellungen bzw. Sterndarstellungen. Das orthogonale Komplement eines invarianten Unterraums ist invariant. Der Begriff der vollständigen Reduzibilität, isotypische Darstellungen, deren Multiplizität. Eindeutigkeit der Zerlegung in Isotytpen, vollständig reduzible Darstellungen mit endlichen Multiplizitäten.

Irreduzible unitäre Darstellungen abelscher lokal kompakter Gruppen sind immer eindimensional, wie aus dem Schurschen Lemma folgt.

Das Schur'sche Lemma

Das Schursche Lemma wird meisten in einer Algebrenversion behandelt und dann auf Gruppen G via die Faltungsalgebra übertragen. Folgende beiden Versionen sollte man kennen: Ist A eine assoziative Algebra und ist $f : A \to \mathrm{End}(V)$, $\dim V < \infty$, ein Algebrenhomomorphismus, so dass V irreduzibel ist, so ist f surjektiv. Insbesondere ist dann jeder Endomorphismus von V, welcher mit dem Bild von A vertauscht, ein Vielfaches der Identität.

Die Voraussetzungen im Unendlichdimensionalen sind subtiler. Hier gilt. Ist A eine Sternalgebra und ist $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$ ein irreduzibler Sternhomomorphismus in die Algebra der beschränkten Operatoren eines Hilbertraums, so ist jeder Operator, welcher mit dem Bild von A vertauscht, ein Vielfaches der Identität. Man sollte wissen, dass der Satz auf dem Spektralsatz folgt.

Dieser Satz impliziert. Ist $G \to \mathrm{Un}(H)$ eine irreduzible unitäre Darstellung einer lokal kompakten Liegruppe, so ist jeder beschränkte Operator auf H, welcher mit dem Bild von G vertauscht, ein Vielfaches der Identität.

Insbesondere ist jede irreduzible Darstellung einer lokal kompakten abelschen Gruppe ein Vielfaches der Identität.

Darstellungen kompakter Gruppen

1) *Unitäre Darstellungen einer kompakten Gruppe sind immer vollständig reduzibel.*
2) *Irreduzible unitäre Darstellungen kompakter Gruppen sind endlich dimensional.*
3) *Die reguläre Darstellung* $\pi : K \to \mathrm{Un}(L^2(K))$ *einer kompakten Gruppe ist vollständig reduzibel und mit endlichen Multiplizitäten.*
4) *Jede Banachdarstellung einer kompakten Gruppe in einem Hilbertraum ist unitarisierbar.*

3) ist der Spezialfall eines sehr viel allgemeineren Satzes. Die Darstellung einer unimodularen Gruppe G auf $L^2(\Gamma/G)$, Γ diskrete Untergruppe mit kompaktem Quotienten $\Gamma\backslash G$ ist vollständig reduzibel und mit endlichen Multiplizitäten. Man sollte wissen, dass dieser Satz einen Zugang zur Theorie der automorphen Funktionen schafft.

Man sollte hierzu wissen, dass eine unitäre Darstellung π vollständig reduzibel mit endlichen Multiplizitäten ist, wenn die Operatoren $\pi(f)$, $f \in \mathcal{C}_c(G)$, kompakt sind (für eine Diracfolge reicht). Man sollte wissen, dass dies aus dem Spektralsatz für kompakte Operatoren folgt und diesen formulieren können. Man sollte auch wissen, dass für einen kompakten topologischen Raum X und eine stetige Funktion $K : X \times X \to \mathbb{C}$ der Integraloperator

$$f \longmapsto \left[x \longmapsto \int_X K(x,y)f(y)dy\right]$$

für jedes Radonmaß kompakt ist. Dies folgt aus dem Satz von Arzela-Ascoli.

Spezielle lineare Gruppe

$$\begin{aligned}
G &= \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),\\
A &= \left\{ a_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R} \right\},\\
N &= \left\{ n_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad x \in \mathbb{R} \right\},\\
K &= \left\{ k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}; \quad \theta \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Die Gruppe $P = AN$ der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ mit positiver Diagonale. Die Abbildung $A \times N \to P$ ist topologisch aber kein Gruppenhomomorphismus. Das Haarmaß von P ist

$$\int_P f(p)dp := \int_A \int_N f(an)dnda.$$

Iwasawa-Zerlegung

Die Abbildung

$$A \times N \times K \longrightarrow G, \quad (a,n,k) \longmapsto ank,$$

is topologisch. Das Haarmaß auf $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ ist

$$\int_G f(x)dx = \int_A \int_N \int_K f(ank)\, dk\, dn\, da.$$

(Dabei sind $da = dt/t, dn = dx, dk = d\theta$ Haarmaße auf A, N, K.)

Multiplizitäten-Eins-Satz

Sei π eine irreduzible unitäre Darstellung der Gruppe $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ auf einem Hilbertraum und sei

$$H(n) = \left\{ h \in H; \quad \pi \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} (h) = e^{\mathrm{i}\theta n} h \right\}.$$

Dann gilt: Die $H(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, sind paarweise orthogonal. Ihre Hilbertraumsumme ist ganz H und es gilt

$$\dim H(n) \leq 1.$$

Beweisidee. Der Raum $S_{m,n}$ besteht aus allen $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ mit der Eigenschaft

$$f(k_\theta x k_{\theta'}) = f(x) e^{-\mathrm{i}m\theta} e^{-\mathrm{i}n\theta'} \qquad (x \in G).$$

Im Falle $m = n$ ist $S_{m,m}$ eine *kommutative* Unteralgebra der Faltungsalgebra $\mathcal{C}_c(G)$, welche auf $H(n)$ operiert. Man kann das Schursche Lemma anwenden.

Liealgebra

Jetzt kommt die Liealgebra

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2}; \quad \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

ins Spiel und die Exponentialfunktion $\exp : \mathfrak{g} \to G$. Die Exponentialfunktion für Matrizen ist durch

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

erklärt. Die Formel $e^A e^B = e^{A+B}$ gilt, wenn A, B kommutieren, allgemein jedoch nicht. Man kann diese Abbildung dazu benutzen, um die Lieableitung $\mathcal{L}_A f$ einer Funktion f auf G zu erklären. (Diese darf auch banachraumwertig sein). Die Formel ist

$$(\mathcal{L}_A f)(x) = \frac{d}{dt} f(x \exp(tA)|_{t=0}$$

Dazu muss f eine differenzierbare Funktion sein. Man muss daher die Grundlagen der Differentialrechnung in Banachräumen kennen. Seien E, F Banachräume, in diesem Zusammenhang über dem Körper der reellen Zahlen (wir wollen reell-differenzierbar und reell-analytisch definieren) und sei $U \subset E$ ein offener Teil. Man kann erklären, wann eine Funktion $f : U \to F$ total differenzierbar ist. Die Ableitung ist als Funktion $f : U \to \mathrm{Hom}(E, F)$ aufzufassen. Da die rechte Seite auch ein Banachraum ist, kann man erklären, was unendlich differenzierbar ist. Im Fall, dass E endlich dimensional ist, kann man sogar erklären, was es heißt, dass f analytisch ist, zunächst im Falle $E = \mathbb{R}^n$, wo man die lokale Entwickelbarkeit in eine absolut konvergente Potenzreihe fordert und dann für allgemeines E durch Basiswahl.

Man betrachtet auch die Komplexifizierung

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \{X \in \mathbb{C}^{2\times 2}; \quad \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Man kann die Lieableitung $\mathbb{C}$-linear auf die Komplexifizierung $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ fortsetzen durch die Formel

$$\mathcal{L}_{A+\mathrm{i}B} = \mathcal{L}_A + \mathrm{i}\mathcal{L}_B.$$

Die übliche $\mathbb{C}$-Basis von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ist

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^- = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}, \quad E^+ = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gelten die Strukturgleichungen

$$[E^+, E^-] = -4\mathrm{i}W, \quad [W, E^+] = 2\mathrm{i}E^+, \quad [W, E^-] = -2\mathrm{i}E^-.$$

Die derivierte Darstellung

Sei $\pi : G \to \mathcal{B}^*(E)$ eine Banachdarstellung von $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Man kann jedem $h \in E$ eine Funktion $G \to H$ zuordnen, nämlich $x \mapsto \pi(x)h$. Man nennt h differenzierbar (analytisch), wenn dies für diese Funktion zutrifft. Wenn h differenzierbar ist, so kann man die Lieableitung $\mathcal{L}_A$ auf diese Funktion anwenden. Man erhält eine neue Funktion $G \to H$. Diese Funktion kann man auf dem Einselement auswerten und erhält so einen neuen Vektor $\tilde{h}$. Man schreibt für ihn

$$d\pi(A)(h) = \tilde{h}.$$

Im Falle $A \in \mathfrak{g}$ lautet die explizite Formel

$$d\pi(A)h := \frac{d}{dt}\pi(\exp(tA)h)\Big|_{t=0}.$$

Sei $\pi : G \to \mathrm{Un}(H)$ eine unitäre irreduzible Darstellung der Gruppe $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ in einem Hilbertraum und sei $\mathcal{H}$ die algebraische Summe der Unterräume $H(n)$. Die Elemente von $\mathcal{H}$ sind analytisch. Die Operatoren $d\pi(A)$ bilden $\mathcal{H}$ in sich ab.

Wir erhalten also eine Abbildung

$$d\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{H})$$

Sie heißt die derivierte Darstellung. Der Operator $d\pi(W)$ wirkt auf $H(n)$ durch Multiplikation mit in.

Zulässige Darstellung

Ein Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf einem (abstrakten) $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{H}$ ist eine lineare Abbildung $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$, mit der Eigenschaft

$$\varphi([A,B]) = \varphi(A)\varphi(B) - \varphi(B)\varphi(A).$$

Man kann diese Darstellung $\mathbb{C}$-linear auf $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ausdehnen. Diese Darstellung heiße zulässig falls sie nicht die Nulldarstellung ist und falls folgende Bedingungen erfüllt sind.

1) Die Eigenwerte von $\varphi(W)$ sind in i$\mathbb{Z}$ und die Eigenräume $H(n)$ des Operators $\varphi(W)$ mit Eigenwert in, $n \in \mathbb{Z}$ haben Dimension ≤ 1.
2) Sei $\mathcal{A}$ die assoziative $\mathbb{C}$-Unteralgebra von $\mathrm{End}(\mathcal{H})$, welche von $\mathfrak{g}$ erzeugt wird. Für jeden von Null verschiedenen Vektor $h \in H(m)$ gilt $\mathcal{A}(h) = \mathcal{H}$.
3) Der Raum $\mathcal{H}$ ist die (algebraische direkte) Summe der $H(n)$.

Der Zusammenhang zwischen unitären irreduziblen Darstellungen von $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und den zulässigen Darstellungen ist sehr eng.

Zwei irreduzible unitäre Darstellungen der Gruppe $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sind genau dann unitär isomorph, wenn die entsprechenden zulässigen Darstellungen von $\mathfrak{g}$ (im naiven algebraischen Sinn) isomorph sind.

Man sollte wissen, dass das damit zusammenhängt, dass die Elemente von $\mathcal{H}$ analytisch sind. Nicht jede zulässige Darstellung kommt von einer unitären Darstellung. Man kann leicht zeigen. Ist π eine unitäre irreduzible Darstellung von G, so ist die assoziierte zulässige Darstellung unitarisierbar.

Eine zulässige Darstellung $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$ heiße unitarisierbar, falls es ein Hermitesches (positive definites) Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ gibt, so dass $\varphi(A)$ für alle $A \in \mathfrak{g}$ schiefsymmetrisch ist. Tatsächlich ist dieses Skalarprodukt bis auf eine positiven konstanten Faktor eindeutig. Insbesondere sind zwei unitarisierbare zulässige Darstellungen, welche als abstrakte Darstellungen genau dann isomorph, wenn sie im unitarisierbaren Sinn isomorph sind.

Aus den Vertauschungsrelationen folgt

$$W : H(n) \longrightarrow H(n), \quad E^+ : H(n) \longrightarrow H(n+2), \quad E^- : H(n) \longrightarrow H(n-2).$$

Casimiroperator

Man braucht zunächst einen Liehomomorphismus von $\mathfrak{g}$ eine assoziative $\mathbb{C}$-Algebra:

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{A}, \quad A \longmapsto \boldsymbol{A}.$$

(Beispiel $A \mapsto \mathcal{L}_A$). Das Caisimirelement ist

$$\omega = \boldsymbol{H}^2 + \boldsymbol{V}^2 - \boldsymbol{W}^2.$$

Fundamentale Eigenschaft: ω ist mit dem Bild von $\mathfrak{g}$ vertauschbar.

Es stellt sich heraus (eine Art Schursches Lemma).

Für jede unitariesierbare zulässige Darstellung (und damit für jede irreduzible unitäre Darstellung operiert der Casimiroperator auf ganz $\mathcal{H}$ durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor λ. Dieser ist eine negative reelle Zahl.

Hieraus ergibt sich nach einigen weiteren Schritten die Bargmannklassifikation der irreduziblen unitären Darstellungen von $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Bargmann-Klassifikation

Eine grobe Klassifikation findet nach der Menge

$$S = \{m \in \mathbb{Z}; \quad H(n) \neq 0\}$$

statt. Man zeigt, dass entweder nur aus geraden oder ungeraden Elementen besteht. Es bestehen nur folgende Möglichkeiten.

1) S ist die Menge aller ganzen Zahlen.
2) S ist die Menge aller ungeraden Zahlen.
3) Es existiert $m \in S$ mit $S = \{m, m+2, m+4, \ldots\}$. (Man nennt m dann niedrigstes Gewicht.)
4) Es existiert $n \in S$ mit $S = \{n, n-2, n-4, \ldots\}$. (Man nennt n dann Höchstgewicht.)
5) Es existieren $m < n$ der selben Parität, so dass $S = \{m, m+2, \ldots, n\}$.

Die Fälle 1) und 2). Man schreibt den Eigenwert λ des Casimiroperators in der Form $\lambda = (s+1)(s-1)$. Damit λ reell und negative ist, muss $s \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ oder in $(-1, 1)$ liegen.

Hauptserien

Im Falle $S = 2\mathbb{Z}$ existiert zu jedem $s \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ und im Falle im Falle $S = 2\mathbb{Z} + 1$ zu jedem $s \in \mathrm{i}\mathbb{R} - \{0\}$ eine irreduzible unitäre Darstellung. Man nennt dies die gerade und die ungerade Hauptserie. Der Parameter s ist bis aufs Vorzeichen eindeutig.

Daneben gibt es im geraden Fall $S = 2\mathbb{Z}$ noch zu jedem $s \in (-1, 1)$, $s \neq 0$, eine Darstellung. Diese Serie heißt die Nebenserie. Auch hier ist s bis aufs Vorzeichen eindeutig. (Es gibt also keine ungerade Nebenserie).

Die Fälle 3) und 4). Hier ist es so, dass eine unitäre irreduzible Darstellung zu einem Niedrigstgewicht m genau dann existiert, wenn $m > 0$ ist und zu einem Höchsgewicht n genau dann, wenn $n < 0$ ist. Diese Darstellungen sind durch das Gewicht eindeutig bestimmt (bis auf unitäre Isomorphie). Die beiden Grenzfälle $n = 1$ und $n = -1$ sind Sonderfälle. Man nennt sie die Mock-diskrete Serie. Sie treten als Ableger der ungeraden Hauptserie auf. Man kann die ungerade Hauptserie auch im Falle $s = 0$ definieren und stellt dann fest, dass sie in zwei irreduzible Darstellungen zerfällt. Dies sind die beiden Mock-diskreten Darstellungen.

Der Rest ($m > 1$ und $n < -1$) macht die diskrete Serie. Diese kann durch gewisse Hilberträume holomorpher (antiholomorpher) Funktionen auf der oberen Halbebene realisiert werden.

Die diskrete Serie kann auch abstrakt charakterisiert werden. Eine irreduzible unitäre Darstellung einer lokal kompakten Gruppe gehört zur diskreten Serie, wenn sie isomorph zu einer Unterdarstellung der regulären Darstellung auf $L^2(G)$ ist.

Der Fall 5). Diese Darstellungen existieren zwar als zulässige Darstellungen. Aber sie sind nicht unitarisierbar.

Realisierung von Darstellungen

Die Klassifikation der unitären irreduziblen Darstellungen funktioniert so, dass man zunächst die unitarisierbaren zulässigen Darstellungen klassifiziert. Danach muss man beweisen, dass diese alle durch unitäre irreduzible Darstellungen der Gruppe $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ realisiert werden können. Man sollte grob wissen, wie das geht.

Die Hauptserien können als Darstellungen auf dem Raum $L^2(K, dk)$ realisiert werden. Ist $s \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, so kann man Funktionen auf K mit Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ mit dem Transformationsverhalten

$$f(py) = a^{1+s} f(y), \qquad p \in P,\ y \in G \quad (s \in \mathrm{i}\mathbb{R}).$$

identifizieren. Auf diesen Funktionen operiert G durch Translation von rechts. Dies gibt eine Darstellung von G auf $L^2(K)$, welche von s abhängt. Es stellt sich heraus, dass dieses eine unitäre Darstellung ist. Sie ist nicht irreduzibel, zerfällt aber in die Summe von zwei Darstellungen (einen geraden Teil, $f(x) = f(-x)$ und einen ungeraden Teil, $f(x) = -f(x)$. Der gerade Teil ist immer irreduzibel, der ungerade nur im Falle $s \neq 0$.

Im Falle $s = 0$ zerfällt der ungerade Teil nochmals in zwei irreduziblen Darstellungen. So gewinnt man die beiden Mock-diskreten.

Man sollte wissen, dass die Hauptserie ein Spezialfall einer induzierten Darstellung ist. Für $s \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ ist a^s ein (unitärer) Charakter von P (und kann damit als eindimensionale Darstellung aufgefaßt werden). Dass in der Induktionsformel a^{1+s} und nicht a^s auftritt, hat damit zu tun, dass auf $P\backslash G$ kein G-invariantes Maß existiert.

Die beiden diskreten Serien kann man auf Hilberträumen holomorpher (antiholomorphen) Funktionen auf der oberen Halbebene konstruieren. Es wird die Operation von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene durch Möbiustransformationen benutzt. Genaue Formeln werden nicht erwartet.

Darstellungen der unitären Gruppe

(Stetige) Darstellungen der kompakten Gruppe $\mathrm{SU}(2)$. In jeder Dimension l gibt es genau eine irreduzible Darstellung (ϱ_l, V_l). (Da $\mathrm{SU}(2)$ kompakt ist, ist sie auch unitarisierbar).

Variante des Multiplizitäten-Eins-Satzes

Für $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ gilt folgender Multiplizitäten-Eins-Satz:

Ist π eine irreduzible unitäre Darstellung von $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, so zerfällt die Einschränkung auf $\mathrm{SU}(2)$ in eine Hilbertraumsumme irreduzibler Darstellungen, wobei jedes ϱ_l höchstens einmal auftritt.

Ein wichtige Invariante der Darstellung ist das kleinste l, das auftritt. Man definiert als $\mathcal{H}$ die algebraische direkte Summe der bezüglich $K = \mathrm{SU}(2)$ irreduziblen Unterräume. Auf $\mathcal{H}$ operiert die Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathbb{C}^{2\times 2}; \quad \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

Vorsicht: Diese haben wir oben mit $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ bezeichnet. Dies heben wir jetzt auf, da wir $\mathfrak{g}$ als reelle Liealgebra betrachten wollen. Auch diese kann man komplexifizieren. Man beweist,

$$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g},$$

wobei beide Seiten als komplexe Liealgebren aufzufassen sind. In jedem der beiden Faktoren gibt es den Casimiroperator. Es gibt daher zwei Casimiroperatoren und damit zwei Eigenwerte $\mu^\pm$. Diese und l, also

$$(\mu^+, \mu^-, l)$$

bestimmen die Darstellung eindeutig. Nicht alle Tripel kommen vor. Es gibt eine Koppelungsbedingung und daher nur zwei freie Parameter.

Es stellt sich heraus, dass es eine Hauptserie und eine Nebenserie (aber keine diskrete Serie) gibt.

Die Lorentzgruppe

Die Lorentzgruppe $\mathrm{O}(n,1)$, $n>1$. Eine Untergruppe vom Index zwei ist $\mathrm{SO}(n,1)$. Eine andere Untergruppe vom Index zwei $\mathrm{O}^+(n,1)$ ist durch $a_{11}>0$ definiert. Ihr Durchschnitt $\mathrm{SO}^+(n,1)$ ist eine Untergruppe vom Index 4. Sie ist die Zusammenhangskomponente der Eins.

Spingruppe

Sie besitzt eine Spinüberlagerung $\mathrm{Spin}(n,1)$. Im Falle $n=3$ ist dies $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Die Abbildung $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\to\mathrm{SO}(3,1)$ sollte man angeben können.

Dazu betrachtet man den Raume der hermiteschen 2×2-Matrizen

$$H=\begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ \bar{h}_1 & h_2 \end{pmatrix}.$$

Wir identifizieren $\mathcal{H}$ mit $\mathbb{R}^4$ through

$$H\longmapsto\Big(\frac{h_0+h_2}{2},\frac{h_0-h_2}{2},\mathrm{Re}\,h_1,\mathrm{Im}\,h_1\Big).$$

Dann gilt

$$\det H=x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2.$$

Die Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ operiert auf $\mathcal{H}$ durch $(A,H)\longmapsto AH\bar{A}'$ Wir erhalten eine Lorentz transformation. Das Bild ist $\mathrm{SO}^+(3,1)$.

Pincarègruppe

Erweiterte Lorentzgruppe $\mathrm{O}(n,1)\cdot\mathbb{R}^{n+1}$. Sie besteht aus Transformationen

$$x\longmapsto Ax+b;\quad A\in\mathrm{O}(n,1),\ b\in\mathbb{R}^{n+1}.$$

Die Poincarégruppe

$$P(3)=\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\cdot\mathbb{R}^4.$$

Wie operiert $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ auf $\mathbb{R}^4$? Wie ist das Gruppengesetz?

Wie klassifiziert man die irreduziblen unitären Darstellungen der Poincarégruppe $P(3)$? Antwort: Man nimmt einen Vektor $a\in\mathbb{R}^4$. Es kommt nur auf seinen Orbit an. Man bildet seinen Stabilisator H_α in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ und von diesem eine unitäre irreduzible Darstellung σ. Man bildet $G_\alpha=H_\alpha\cdot\mathbb{R}^4$. Man betrachtet noch den unitären Charakter $e^{\mathrm{i}\langle\alpha,x\rangle}$ auf $\mathbb{R}^4$ und fügt diesen und σ in naheliegender Weise zu einer Darstellung auf G_α zusammen. Man induziert diese Darstellung auf $P(3)$. Nach Mackey ist diese Darstellung unitär und irreduzibel und man erhält so alle.

Die etwas knifflige Definition der induzierten unitären Darstellung (Mackey) wird jetzt kurz erläutert

Die induzierte Darstellung ist bereits für endliche Gruppen ein wichtiges und nicht triviales Konzept. Um sie für unitäre Darstellungen erklären zu können, braucht man eine Verallgemeinerung des Quotientenmaßes.

Mackey's Quotientenmaß

Sei $P \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe einer lokal kompakten Gruppe G. Wir setzen nicht voraus, dass P oder G unimodular ist. Wir wählen ein links invariantes Maß $d_l x$ auf G und ein rechts invariantes Maß $d_r p$ auf P. Wir möchten gern ein Maß auf $P\backslash G$ konstruieren. Dies geht nicht ganz ohne Voraussetzungen. In der Tat benötigen wir folgende Bedingung. (Sie ist in für Liegruppen und damit in unseren Anwendungen stets erfüllt).

Es existiert eine Funktion $q : G \to \mathbb{R}_{>0}$, welche meßbar in bezug auf jedes Radonmaß auf G ist und so dass q and q^{-1} lokal beschränkt sind und so, dass die Umsetzungsformel

$$\boxed{q(px) = \frac{\Delta_P(p)}{\Delta_G(p)} q(x)}$$

gültig ist.

Man kann die Funktion q benutzen, um ein Maß dx auf $P\backslash G$ zu definieren. Es ist durch die Formel

$$\boxed{\int_G f(x)q(x)d_l x = \int_{P\backslash G} \left[\int_P f(px) d_r p \right] dx}$$

charakterisiert. Wenn G und P beide unimodular sind, kann man $q = 1$ nehmen und dieses Maß ist das Quotientenmaß. Im allgemeinen hängt dieses Maß von der Wahl von q ab.

Induzierte Darstellung

Sei G eine lokal kompakte Gruppe und P eine abgeschlossene Untergruppe. Wir nehmen an, dass eine Funktion q existiert und gegeben ist. Sei $\sigma : G \to \mathrm{Un}(H)$ eine unitäre Darstellung. Dann kann man eine unitäre Darstellung π von G auf einem Hilbertraum $H(\sigma)$ wie folgt erklären.

1) *Definition von $H(\sigma)$. Sei $\mathcal{H}(\sigma)$ die Menge aller (bezüglich $d_l x$) meßbaren Funktionen $f : G \to H$ mit der Eigenschaft $f(px) = \sigma(p)f(x)$ und so, dass $\langle f(x), f(x) \rangle_H$ (betrachtet als Funktion of $P\backslash G$) integrierbar bezüglich dx ist. Sei $H(\sigma)$ der Faktorraum von $\mathcal{H}(\sigma)$ nach dem Unterraum aller Funktionen, so dass $\langle f(x), f(x) \rangle_H$ eine Nullfunktion ist. Dann ist $H(\sigma)$ mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g \rangle = \int_{P\backslash G} \langle f(x), g(x) \rangle_\sigma dx$$

ein Hilbertraum.

2) *Definition der Darstellung.*

$$(\pi f)(x) = f(xg)\sqrt{\frac{q(x)}{q(xg)}}.$$

Zusatz. Die Darstellung π ist bis auf unitäre Isomorphie von der Wahl von q unabhängig. Sie heißt die unitär induzierte Darstellung.

Die induzierte Darstellung einer irreduziblen Darstellung braucht nicht irreduzibel zu sein. Unter speziellen Voraussetzungen ist dies aber doch der Fall.

Mackey's theorem

Sei G eine lokal kompakte Gruppe und sei $A \subset G$ ein abgeschlossener Normalteiler, welcher isomorph ist zu $\mathbb{R}^n$. Wir identifizieren A mit $\mathbb{R}^n$. Auf $A = \mathbb{R}^n$ sei eine symmetrische nicht ausgeartete Bilinearform gegeben. Schließlich sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, so dass

$$H \times A \longrightarrow G, \quad (h, a) \longmapsto ha$$

eine topologische Abbildung ist. Die Gruppe G operiert auf A durch Konjugation gag^{-1}, da A ein Normalteiler ist. Insbesondere operiert auch die Untergruppe H auf A. Wir nehmen an, dass die Operation von H auf A das Skalarprodukt invariant läßt. Unser Hauptbeispiel ist die Poincarégruppe. Das Theorem von Mackey bedarf einer Voraussetzung: Dazu teilt man die Gruppe A in sogenannte Orbiten auf. Ein Orbit ist eine Teilmenge $\mathcal{O}$ von A der Form

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(a) = \{gag^{-1};\ g \in G\}.$$

Es genügt natürlich, g aus H zu nehmen. Offenbar ist A die disjunkte Vereinigung der Orbiten.

Eine Untergruppe von H heißt ***kleine Gruppe****, falls es ein Element $a \in A$ gibt, so dass diese Untergruppe gleich dem Stabilisator*

$$H = H_a = \{g \in G; \quad gag^{-1} = a\}$$

ist.

Wir bekommen dann eine bijektive Abbildung

$$H/H_a \longrightarrow \mathcal{O}(a), \quad h \longmapsto hah^{-1}.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich stetig. Man kann zeigen, dass sie sogar topologisch ist. Wir können dann die Gruppe

$$G_a = H_a A$$

betrachten. Wir benötigen nun zweierlei:

Ein Element $a \in A$.

Eine irreduzible unitäre Darstellung der kleinen Gruppe $\sigma : H_a \to \mathrm{Un}(H)$.

Wir können beide zu einer unitären unitäre Darstellung

$$\sigma\chi_a : G_a \longrightarrow \mathrm{Un}(H), \quad (g,x) \longmapsto e^{2\pi\mathrm{i}(a,x)}\sigma(g)$$

verbinden. Wir können diese Darstellung unitär induzieren,

$$\pi : G \longrightarrow \mathrm{Un}(H(\sigma,a)).$$

Für Mackey's Theorem braucht man eine schwache hinreichende Voraussetzung, die bei uns erfüllt ist. Sie lautet:

Es existiert ein abgeschlossene Teilmenge von A, deren Durchschnitt mit jedem Orbit aus genau einem Element besteht.

Unter dieser Voraussetzung gilt Mackey's Theorem.

Mackey's theorem. *Die so definierte Darstellung π is irreduzibel. Jede unitäre irreduzible Darstellung von G ist unitär isomorph zu einer solchen. Dies gibt eine umkehrbare Beziehung zwischen den Isomorphieklassen irreduzibler unitärer Darstellungen von G und Paaren (a,σ), wobei a ein Repräsentantensysten der Orbiten und σ die Isomorphieklassen unitärer Darstellungen von H_a durchläuft.*

Irreduzible unitäre Darstellungen der Poincarg̀ruppe

Zunächst geben wir ein Vertretersystem der Orbiten von $\mathrm{Spin}(3,1) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ auf V and:

a)	$(m,0,0,\dots,0)$	$m > 0$
b)	$(m,0,0,\dots,0)$	$m < 0$
c)	$(1,1,0,\dots,0)$	
d)	$(-1,1,0,\dots,0)$	
e)	$(0,m,0,\dots,0)$	$m > 0$
f)	$(0,0,0,\dots,0)$	

Kleine Gruppen

Wir geben die kleinen Gruppen als Untergruppen von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ an. In den Fällen a),b) ist die kleine Gruppe

$$\mathrm{SU}(2).$$

In den Fällen c) und d) ist es die Gruppe

$$\mathrm{Iso} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\theta} & z \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\theta} \end{pmatrix}; \quad \theta \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Im Falle e) ist es

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Im Falle f) ist es die Gruppe

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Die irreduziblen unitären Darstellungen der Gruppen $\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ wurden im Verlauf der Vorlesung studiert. Man braucht noch die von Iso. Sie können leicht mit Mackey's Satz gewonnen werden.