Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemester 2011/12

Vorlesung: Matthias Katzfuß **Übung**: Martin Kroll

Probeklausur

Die Abschlussklausur wird ebenfalls aus sechs Aufgaben bestehen. Die Aufgaben der Probeklausur spiegeln in etwa den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben der Abschlussklausur wider, jedoch nicht unbedingt den in der Abschlussklausur abgefragten Stoff.

Aufgabe 1.

Es seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ und

$$\mathbf{P}(X = n) = \mathbf{P}(Y = n) = \frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und vereinfachen Sie sie soweit wie möglich:

(a) $\mathbf{P}(\min(X, Y) \leq i)$,

(b) $\mathbf{P}(X = Y)$,

(c) $\mathbf{P}(X \text{ teilt } Y)$.

Aufgabe 2.

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts lag die Jahresmitteltemperatur in Karlsruhe bei 10.4 Grad Celsius. Die angehende Klimaforscherin Miri Swarm behauptet, dass sich die mittlere Jahrestemperatur in den letzten zwei Jahrhunderten erhöht hat. Dabei stützt sie sich auf die gemessenen Jahresmitteltemperaturen der Jahre 2000 bis 2008 (jeweils in Grad Celsius)

$$12.2 \quad 11.3 \quad 11.7 \quad 11.8 \quad 11.1 \quad 11.2 \quad 11.6 \quad 11.9 \quad 11.5.$$

(a) Stimmen Sie Miri Swarm zu? Formulieren Sie dieses Testproblem mathematisch und führen Sie dazu einen geeigneten Test durch, bei dem Sie annehmen, dass die Jahresmitteltemperatur näherungsweise normalverteilt ist mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 1$. Dabei soll die Wahrscheinlichkeit, der Klimaforscherin zuzustimmen, obwohl gar keine Temperaturerhöhung vorliegt, maximal 5% betragen.

(b) Für welchen falschen Parameterbereich können Sie aus dieser Form von Test ein 95% Konfidenzintervall bestimmen? Geben Sie dieses Intervall explizit an!

HINWEISE: $\bar{X}_9 \approx 11.59$, Quantile der Standardnormalverteilung: $q_{0,05} = -1.64$, $q_{0,01} = -2,33$.

Aufgabe 3.

Es seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. mit unbekanntem Erwartungswert μ und endlicher Varianz. Zur Schätzung von μ schlagen wir den folgenden Schätzer vor

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(a) Berechnen Sie $\mathbf{E}\hat{\mu}_n$ sowie $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\hat{\mu}_n$!

(b) Berechnen Sie $\mathrm{var}(\hat{\mu}_n)$ sowie $\lim_{n\to\infty} \mathrm{var}(\hat{\mu}_n)$!

(c) Ist $\hat{\mu}_n$ ein konsistenter Schätzer für μ?

Aufgabe 4.

Seien X und Y gemeinsam normalverteilt mit $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$ und $\mathrm{Kov}(X, Y) = \frac{1}{2}$.

(a) Geben Sie die gemeinsame Dichte von X und Y an.

(b) Berechnen Sie $\mathbf{P}(X > \frac{1}{2} | Y = 1)$.

Aufgabe 5.

Es seien $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} NB(r, p)$ verteilt mit bekanntem positiven Parameter $r \in \mathbb{N}$ und unbekanntem Parameter $p \in (0, 1)$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{p}_n$ für p (es ist auch zu zeigen, dass $\hat{p}_n$ die Likelihood <u>maximiert</u>) und berechnen Sie die Fisher-Information $I(p)$.

Hinweis: Die negative Binomialverteilung $NB(r, p)$ hat die Zähldichte

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} (1-p)^{k-r} p^r \text{ für alle } k \geq r.$$

Aufgabe 6.

Es sei $p \in (0, 1)$ bekannt und $X \sim \mathcal{B}(N, p)$, wobei N *a priori* gemäß einer Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda > 0$ verteilt sei. Berechnen Sie die Posterior-Verteilung von N und den zugehörigen Posterior-Erwartungswert.