Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemester 2011/12

Lösungsvorschlag zum 13. Übungsblatt

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.

Berechnung der Posteriori:

$$\begin{aligned}
[\theta|X_1,\ldots,X_n] &\propto [X_1,\ldots,X_n|\theta]\cdot[\theta] \\
&= \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(X_i)\cdot\theta^{-(a+1)} \\
&= 1_{(0,\theta)}(X_{(n)})\cdot\theta^{-(a+1)-n} \quad (X_{(n)} = \max_{1\le i\le n} X_i) \\
&= \begin{cases} 0 & ,\theta < X_{(n)}, \\ \theta^{-(a+1)-n} & ,\theta \ge X_{(n)}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Also gilt

$$[\theta|X_1,\ldots,X_n] = c\cdot\begin{cases} 0 & ,\theta < X_{(n)}, \\ \theta^{-(a+1)-n} & ,\theta \ge X_{(n)}. \end{cases}$$

mit $c^{-1} = \int\limits_{X_{(n)}}^{\infty} \theta^{-(a+1)-n} = \frac{1}{a+n}X_{(n)}^{-(a+n)}$ und folglich

$$[\theta|X_1,\ldots,X_n] = \begin{cases} 0 & ,\theta < X_{(n)}, \\ (a+n)X_{(n)}^{a+n}\theta^{-(a+n+1)} & ,\theta \ge X_{(n)}. \end{cases}.$$

Bei der Posteriori-Verteilung handelt es sich wieder um eine Pareto-Verteilung (Stichwort: *konjugierte Priori*), nämlich $\mathrm{Par}(a+n, X_{(n)})$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2.

Wir berechnen zunächst ganz allgemein die Posteriori-Verteilung, falls $X|\mu \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ und der Erwartungswert μ a priori $\mu \sim \mathcal{N}(\nu,\tau^2)$ verteilt ist. Die Ergebnisse in (a) und (b) erhält man dann durch Einsetzen der gegebenen Werte.
Für die Posteriori gilt:

$$\begin{aligned}
[\mu|X] &\propto [X|\mu]\cdot[\mu] \\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}(\mu-\nu)^2\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)\mu^2 + \mu\left(\frac{X}{\sigma^2}+\frac{\nu}{\tau^2}\right) - \frac{X^2}{2\sigma^2} - \frac{\nu^2}{2\tau^2}\right) \\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)\{\mu^2 - 2\mu\left(\frac{X}{\sigma^2}+\frac{\nu}{\tau^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)^{-1}\}\right) \\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)\{\mu - \left(\frac{X}{\sigma^2}+\frac{\nu}{\tau^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)^{-1}\}^2\right).
\end{aligned}$$

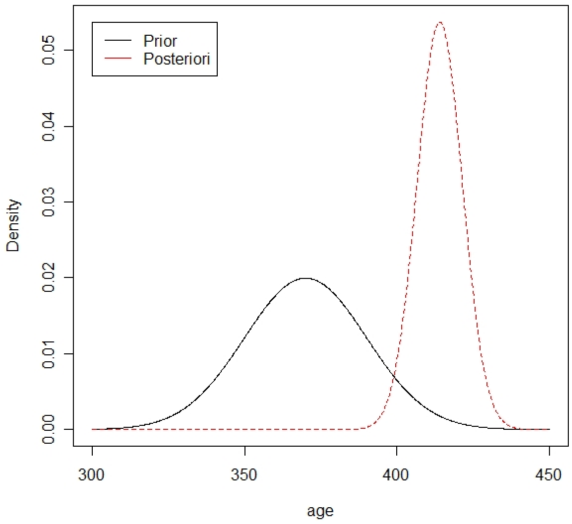
Demnach gilt:

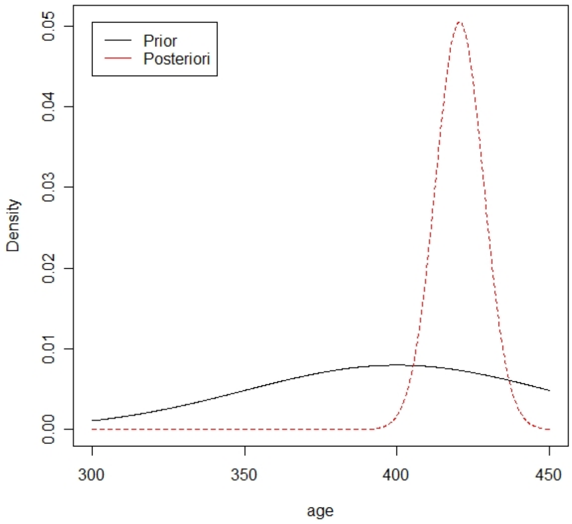
$$\mu|X \sim \mathcal{N}\left(\left(\frac{X}{\sigma^2}+\frac{\nu}{\tau^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)^{-1},\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)^{-1}\right).$$

(a) Es ist $X = 421, \nu = 370, \tau = 20$. Somit ergibt sich $\mu|X \sim \mathcal{N}((413,97),(7,43)^2)$.

(b) Es ist $X = 421, \nu = 400, \tau = 50$. Somit ergibt sich $\mu|X \sim \mathcal{N}((420,48),(7,90)^2)$.

(c) Die obere Abbildung gehört zu Aufgabenteil (a), die untere zu Aufgabenteil (b).





Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.

(a) Berechnung der Posteriori:

$$
\begin{aligned}
[\pi|X_1,\dots,X_n] &\propto [X_1,\dots,X_n|\pi]\cdot[\pi] \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n}\pi^{x_i}(1-\pi)^{1-x_i}\right)\{\frac{\omega}{B(\alpha_1,\beta_1)}\pi^{\alpha_1-1}(1-\pi)^{\beta_1-1} \\
&+ \frac{1-\omega}{B(\alpha_2,\beta_2)}\omega\pi^{\alpha_2-1}(1-\pi)^{\beta_2-1}\} \\
&= \frac{\omega}{B(\alpha_1,\beta_1)}\pi^{\alpha_1+\sum X_i-1}(1-\pi)^{\beta_1+n-\sum X_i-1} \\
&+ \frac{1-\omega}{B(\alpha_2,\beta_2)}\pi^{\alpha_2+\sum X_i-1}(1-\pi)^{\beta_2+n-\sum X_i-1}
\end{aligned}
$$

Dabei ist der erste Summand proportional zu einer Be$(\alpha_1+\sum X_i,\beta_1+n-\sum X_i)$-Verteilung, der zweite zu einer Be$(\alpha_2+\sum X_i,\beta_2+n-\sum X_i)$. Setze nun $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i+\sum X_i$ und $\tilde{d}\beta_i = \beta_i+n-\sum X_i$. Dann ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
[X_1,\dots,X_n|\pi]\cdot[\pi] &= \frac{\omega}{B(\alpha_1,\beta_1)}\pi^{\alpha_1+\sum X_i-1}(1-\pi)^{\beta_1+n-\sum X_i-1} \\
&+ \frac{1-\omega}{B(\alpha_2,\beta_2)}\omega\pi^{\alpha_2+\sum X_i-1}(1-\pi)^{\beta_2+n-\sum X_i-1} \\
&= \omega\frac{B(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\beta}_1)}{B(\alpha_1,\beta_1)}f(\pi|\tilde{\alpha}_1,\tilde{\beta}_1)+(1-\omega)\frac{B(\tilde{\alpha}_2,\tilde{\beta}_2)}{B(\alpha_2,\beta_2)}f(\pi|\tilde{\alpha}_2,\tilde{\beta}_2).
\end{aligned}
$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar

$$
\begin{aligned}
[X_1,\dots,X_n] &= \int_0^1 [X_1,\dots,X_n|\pi][\pi]d\pi \\
&= \omega\frac{B(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\beta}_1)}{B(\alpha_1,\beta_1)}+(1-\omega)\frac{B(\tilde{\alpha}_2,\tilde{\beta}_2)}{B(\alpha_2,\beta_2)}
\end{aligned}
$$

und letztendlich

$$
\begin{aligned}
[\pi|X_1,\dots,X_n] &= \frac{[X_1,\dots,X_n|\pi][\pi]}{[X_1,\dots,X_n]} \\
&= \underbrace{\frac{\omega\frac{B(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\beta}_1)}{B(\alpha_1,\beta_1)}}{\omega\frac{B(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\beta}_1)}{B(\alpha_1,\beta_1)}+(1-\omega)\frac{B(\tilde{\alpha}_2,\tilde{\beta}_2)}{B(\alpha_2,\beta_2)}}}_{=:\tilde{\omega}}f(\pi|\tilde{\alpha}_1,\tilde{\beta}_1) \\
&+ \frac{(1-\omega)\frac{B(\tilde{\alpha}_2,\tilde{\beta}_2)}{B(\alpha_2,\beta_2)}}{\omega\frac{B(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\beta}_1)}{B(\alpha_1,\beta_1)}+(1-\omega)\frac{B(\tilde{\alpha}_2,\tilde{\beta}_2)}{B(\alpha_2,\beta_2)}}f(\pi|\tilde{\alpha}_2,\tilde{\beta}_2),
\end{aligned}
$$

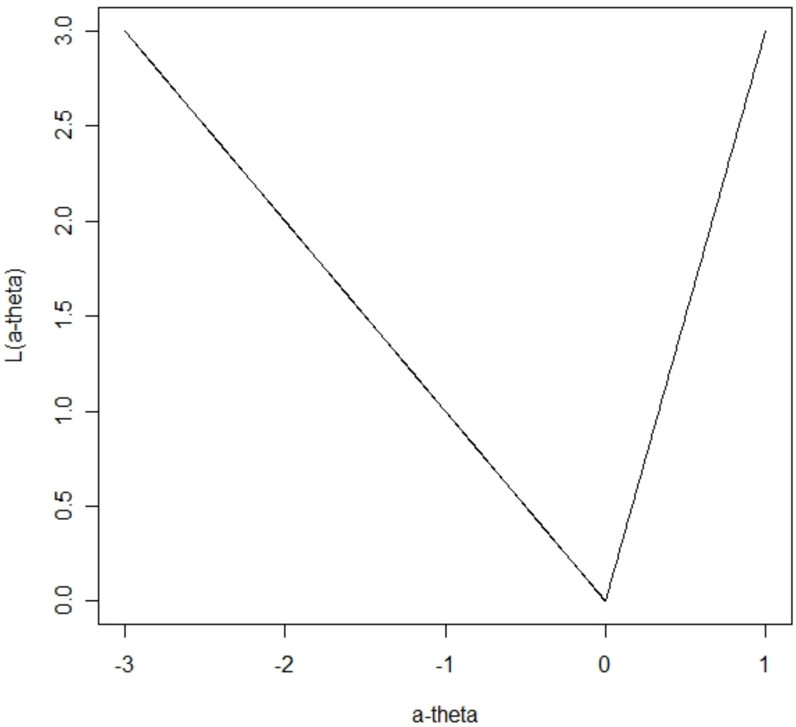
die Posteriori ist also wiederum eine Mischung zweier Beta-Verteilungen.

(b) Da der Erwartungswert einer Be(α, β)-Verteilung durch $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ gegeben ist, gilt

$$\mathbf{E}[\pi | X_1, \ldots, X_n] = \tilde{\omega} \frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1} + (1 - \tilde{\omega}) \frac{\tilde{\alpha}_2}{\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\beta}_2}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4.

(a) Plot der Verlustfunktion für $c = 1, d = 3$



(b) Der Bayes-Schätzer minimiert das erwartete Risiko unter der Posteriori $[\theta|x]$, i.e.

$$R(\theta) := \mathbf{E}[L(\hat{\theta}, \theta)|x] = \int_{-\infty}^{\infty} L(\hat{\theta}, \theta) f(\theta|x) d\theta.$$

Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} L(\hat{\theta}, \theta) f(\theta|x) d\theta = -c \int_{\hat{\theta}}^{\infty} (\hat{\theta} - \theta) f(\theta|x) d\theta + d \int_{-\infty}^{\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \theta) f(\theta|x) d\theta.$$

Analog zu Satz 3.4 in der Vorlesung erhält man:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} &= -c \int\limits_{\hat{\theta}}^{\infty} f(\theta|x) d\theta + d \int\limits_{-\infty}^{\hat{\theta}} f(\theta|x) d\theta = 0 \\
&\Leftrightarrow -c(1 - F(\hat{\theta}|x)) + dF(\hat{\theta}|x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \hat{\theta} = F^{-1}\left(\frac{c}{c+d}|x\right).
\end{aligned}
$$

Der Bayesschätzer ist also gegeben durch $\hat{\theta} = F^{-1}\left(\frac{c}{c+d}|x\right)$ [auf das Nachprüfen, dass es sich in der Tat um ein Minimum handelt, verzichten wir hier]. Dies bestätigt unter anderem die in der Vorlesung gemachte Aussage, dass im Fall $c = d = 1$ der Bayesschätzer gleich dem Posteriori-Median $F^{-1}\left(\frac{1}{2}|x\right)$ ist.

Sollte jemand Fehler bzw. Unklarheiten in diesem Lösungsvorschlag bemerken, so kann er mir gerne eine Mail zukommen lassen: martin.kroll@uni-heidelberg.de.