Pell 曲線における Birch and Swinnerton-Dier 予想の類似

京都大学理学研究科数学・数理解析専攻修士課程 2 年
岩本真行

1 Introduction

Lemmermeyer 氏は論文 [1, 2] において $\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線と Pell 曲線 $x^2 - \Delta y^2 = 4$ の類似性に注目し，楕円曲線の Birch and Swinnerton-Dier 予想（以下 BSD 予想）の類似が Pell 曲線に対しても成り立つことを示唆した．本研究はこの論文に触発されて行われた．

楕円曲線の BSD 予想は代数体 k 上の楕円曲線 E の L 関数 $L(E,s)$ に対する予想である．二つの主張から成るが，特殊値に関する予想は

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^{-r}L(E,s) = \frac{R\Omega c}{(\sharp E(k)_{\mathrm{tors}})^2}\sharp Ш(E)$$

（r は $L(E,s)$ の $s=1$ における零点の位数）が成り立つというものである．L 関数の特殊値が右辺に現れる E の数論的，幾何的不変量（定義は後述）により表現されるというのが主張である．

Lemmermeyer 氏は [2] において Pell 曲線 C に対する L 関数 $L(C,s)$ を導入し，それが本質的に $k=\mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ の Kronecker 指標 χ の Dirichlet$L$ 関数 $L(s,\chi)$ に一致することを示した．そして $L(s,\chi)$ の $s=1$ における特殊値を表現する有名な Dirichlet の公式

$$L(1,\chi) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega\sqrt{|\Delta|}}h_k & (\Delta > 0) \\ \frac{2\log\epsilon}{\sqrt{\Delta}}h_k & (\Delta < 0) \end{cases}$$

($\omega : k$ に含まれる 1 の冪根の個数, $\epsilon :$ 基本単数, $h_k : k$ の（広義）類数) が Pell 曲線の不変量により表現されることを示唆した．彼の論文は所々で直感的に議論が進められており，それを正当化したいというのが本研究の動機であった．

研究の過程で局所体上の積分や代数多様体に付随するアデール空間上の積分を導入することにより両者を並行的に扱えることに気づき，当初の目標はある程度達成された．本論文における主な結果は以下のようになる．

1. Pell 曲線のファッジ因子の p 進積分による定義及びその計算．
   BSD 予想に現れる値 c をファッジ因子と呼ぶ（定義後述）．これの Pell 曲線に対するよい定義の必要性が [2] の最後に述べられている．これを p 進積分を用いて厳密に定義し計算した．

   Theorem 1 Pell 曲線 C のファッジ因子 c_p は

   $$c_p = \begin{cases} 1 & (p \nmid \Delta) \\ 2|\Delta|_p & (p \mid \Delta) \end{cases}$$

   ($|\cdot|_p$ は p 進付値) である．

2. Pell 曲線における BSD 予想の類似．
   Pell 曲線 C の L 関数 $L(C,s)$ の $s=1$ における特殊値をその不変量で表し，BSD 予想の類似が成立していることを確かめた．

   Theorem 2 $L(C,s)$ は正確に $L(\chi,s)$ に一致し，

   $$L(C,1) = \frac{h_C \cdot vol(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z}))\cdot\prod_p vol(C(\mathbf{Z}_p))}{\sharp\mathrm{Pic}(C)}\sharp Ш(C) \quad (*)$$

が成り立つ．ここで h_C は C のアデール空間に対して定義される類数，$vol(\cdot)$ は最大次微分形式の積分によって定義される局所体上の体積である．詳しい定義は後に行う．

BSD 予想を

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^{-r}L(E,s)=\frac{R\cdot vol(E(\mathbf{R}))\cdot\prod_p vol(E(\mathbf{Q}_p))}{\sharp E(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}}\sharp \mathrm{Pic}(E)_{\mathrm{tors}}}\sharp Ш(E)$$

と表現すると，類似が明らかとなる．

3. Dirichlet の公式の導出.
   $(*)$ の右辺の各因子を計算することにより Dirichlet の公式を導いた.

研究を進める過程で指導教官の池田保先生には随所で有効なアドバイスを頂きました．ここに記し感謝の意を表します.

2 楕円曲線と Pell 曲線の類似

Pell 曲線とは，整数論で有名な Pell 方程式 $x^2-\Delta y^2=4$ で定義される $\mathbf{Q}$ 上のアフィン代数曲線である．その名が示すとおり，この方程式の整数解は古くから研究されてきたが，現在では二次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ のノルム 1 の元を求める方程式と解釈されている．楕円曲線と Pell 曲線は以下のように種々の類似点を持ち，この事実が両者の類似を考える原動力となっている．

· 代数体上の可換代数群の構造の所持

楕円曲線に可換代数群の構造が入ることはよく知られているが，Pell 曲線にも可換代数群の構造が入る．このことは，Pell 曲線 C の有理点の集合 $C(\mathbf{Q})$ が二次体 $k=\mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ のノルム 1 の集合と一対一対応することからわかる．すなわち，二次体における掛け算による群構造を引き戻すことによって群構造が定義される．具体的に書けば，

$$x^2-\Delta y^2=4\Leftrightarrow(\frac{x}{2})^2-\Delta(\frac{y}{2})^2=1\Leftrightarrow N_{k/\mathbf{Q}}(\frac{x}{2}+\sqrt{\Delta}\frac{y}{2})=1$$

であるから，一対一対応を

$$C(\mathbf{Q})\ni(x,y)\leftrightarrow\frac{x}{2}+\sqrt{\Delta}\frac{y}{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$$

によって定める．$(\frac{x}{2}+\sqrt{\Delta}\frac{y}{2})(\frac{x'}{2}+\sqrt{\Delta}\frac{y'}{2})=\frac{xx'+\Delta yy'}{2}+\sqrt{\Delta}\frac{xy'+yx'}{2}$ より $(x,y)+(x',y')=(\frac{xx'+\Delta yy'}{2},\frac{xy'+yx'}{2})$ となる．また $-(x,y)=(x,-y)$ である．これらは見てのとおり代数射であり，C はこの演算により可換代数群となる．注意すべき点は整点の集合 $C(\mathbf{Z})$ も上の群構造で閉じている点である．これは $C(\mathbf{Z})$ が整数環 $\mathfrak{o}_k$ のノルム 1 の元全体と一致することからわかる．

· 群構造の類似

有名な Mordell-weil の定理は代数体 K 上の楕円曲線 E の有理点の成す群 $E(K)$ が有限生成であることを主張している．では，Pell 曲線の有理点の成す群 $C(\mathbf{Q})$ についてはどうだろうか．この群が有限生成とは限らないことが次のようにして分かる．群完全列

$$\begin{array}{ccccccccc}1 & \longrightarrow & \mathbf{Q}^\times & \longrightarrow & k^\times & \longrightarrow & C(\mathbf{Q}) & \longrightarrow & 1\\ & & & & x & \longrightarrow & x\bar{x}^{-1} & & \end{array}$$

が成立するが，ここで特に $\mathfrak{o}_k$ が PID の場合を考える．k における素元の分解を考えると $C(\mathbf{Q})$ は $\pi\bar{\pi}^{-1}(\pi:k$ で完全分解する素数を割る素元) で生成する自由アーベル群であることが分かる．このような素元は無数に存在する (Dirichlet の算術級数定理) ことから，$C(\mathbf{Q})$ は有限生成ではない．一方で整点の成す群 $C(\mathbf{Z})$ については，Dirichlet の単数定理により常に rank1 以下の有限生成群である．従って $E(K)$ と $C(\mathbf{Z})$ を比較すれば，両者の群構造は類似しているといえる．

Remark 2.1 (相違点について) 両者の最大の相違点は，楕円曲線が完備であるのにたいし Pell 曲線が非完備である点である．類似を追求する立場からはこの相違は気持ち悪く感じられるが，以下の考察から非完備性は修正すべきではない．Pell 曲線を完備化するためには．方程式を斉次化して $\mathbf{P}^2$ に埋め込めばよい．

$$\tilde{C} : x^2 - \Delta y^2 = 4z^2$$

これは $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ に同型であり，代数群の構造を入れることはできない．またその Hasse-Weil$L$ 関数（定義は後述）も自明となる．このように無限遠点を補うことにより幾何的にも数論的にも自明な対象となってしまう．

3　Hasse-Weil$L$ 関数と Hasseζ 関数

楕円曲線の L 関数は本来 Hasse-Weil$L$ 関数という広いクラスの L 関数として定義されるべきだが，この定義に従うと，エタールコホモロジー論を縦横に使用することになり筆者の力量を超える上，また，L 関数の定義にこだわりすぎるのは本論文の目的からも逸脱することになるので，ここではやや妥協して Hasseζ 関数と呼ばれる幾分扱いやすい関数の積因子として定義することにしたい．この方針は後に Pell 曲線の L 関数を定義する際にもとられる．

Hasse-Weil$L$ 関数は以下のように定義される．

Definition 3.1 (Hasse-Weil$L$ 関数) 代数体 K 上の射影非特異多様体 X に対し，関数

$$L(X,s) = \prod_{v:X\ \text{の有限素点}} P_v(M, N(v)^{-s})$$

を X の Hasse-Weil$L$ 関数と呼ぶ．
ただし，$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ が連続に作用するベクトル空間 V に対して，

$$P_v(V,u) := \det(1 - Fr_v u; V^{I_v})^{-1}$$

（$Fr_v \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ は v の幾何的 Frobenius，I_v は v の惰性群）であり，M には $\bar{X} = X \otimes_K \bar{K}$ の l 進コホモロジー群 $H^i_{\acute{e}t}(\bar{X}, \mathbf{Q}_l)$ を代入する．

積因子 $P_v(M, N(v)^{-s})$ は X の v における reduction$X \bmod v$ のエタールコホモロジー群への作用で記述される．すなわち，

$$P_v(H_{\acute{e}t}(\bar{X}, \mathbf{Q}_l), u) = P_v(H_{\acute{e}t}(\overline{X \bmod v}, \mathbf{Q}_l), u)$$

が成立する．

次に，Hasseζ 関数を定義する．

Definition 3.2 (Hasseζ 関数) $\mathbf{Z}$ 上の有限型スキーム X に対して定義される複素関数

$$\zeta(X,s) = \prod_{x \in |X|} (1 - N(x)^{-s})$$

を Hasseζ 関数と呼ぶ．ここで $|X|$ は X の閉点の集合，$N(x)$ は x の剰余体の位数をあらわす．

例を上げておく．

- Dedekindζ 関数
  代数体 k の整数環 $\mathfrak{o}_k$ に対して，$\zeta(\mathrm{Spec}\mathfrak{o}_k, s)$ は Dedekindζ 関数

  $$\zeta(\mathrm{Spec}\mathfrak{o}_k, s) = \prod_{\mathfrak{p}:\text{素イデアル}} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})$$

  に一致する．特に $\mathfrak{o}_k = \mathbf{Z}$ とすると，Riemannζ 関数が得られる．

· 合同 ζ 関数
V を有限体 $\mathbf{F}_q$ 上の非特異代数多様体とする．V は自然に $\mathbf{F}_q$ 上の有限型スキームとみなされ，更に，射 $\mathbf{Z} \to \mathbf{F}_q$ により $\mathbf{Z}$ 上のスキームとなる．$\zeta(V,s)$ は合同 ζ 関数 $Z(V,q^{-s})$ に一致する．

以下，上に定義した二つの関数が合同 ζ 関数を介して結びつくことをみる．

Definition 3.3 (合同 ζ 関数) V を有限体 $\mathbf{F}_q$ 上の射影代数多様体とする．V の $\mathbf{F}_q$ 有理点の個数を N_n とおいたとき，形式的冪級数

$$Z(V,u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{n} u^n$$

を V の合同 ζ 関数と呼ぶ.

Remark 3.1 通常 Vには「非特異」という条件が課されるが，本論文では特異点を有す多様体についても上記の冪級数を考察するので省略した.

はじめに Hasseζ 関数と合同 ζ 関数を結びつける．X を $\mathbf{Z}$ 上の有限型スキームとする．スキームの射は閉点を閉点に写すので $x \in \bar{X}$ はある閉ファイバー $X \bmod p = X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_p$ に属す．従って無限積を閉ファイバー毎にまとめれば,

$$\zeta(X,s) = \prod_p \prod_{x \in |X \bmod p|} (1 - N(x)^{-s})$$

となる.

Lemma 3.1 有限体 k 上の多様体 Vに対し,

$$Z(V,u) = \prod_{x \in |V|} (1 - u^{\deg x})^{-1}$$

$(\deg x := [k(x) : k])$ が成立する.

Proof. $\log\Big(\prod_{x\in|V|}(1-u^{\deg x})^{-1}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{n} u^n \quad (N_n = \sharp V(\mathbf{F}_{q^n}))$ を言えばよい.

$$\begin{aligned}
\log \prod_{x\in\bar{V}} (1-u^{\deg x})^{-1} &= \sum_{x\in|V|} -\log(1-u^{\deg x}) \\
&= \sum_{x\in|V|}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(u^{\deg x})^m}{m} = \sum_{x\in|V|}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{u^{m\deg x}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u^n
\end{aligned}$$

ここで,

$$A_n = \sum_{m\deg x = n} \frac{1}{m} = \sum_{\deg x | n} \frac{\deg x}{n} = \frac{1}{n}\sum_{\deg x|n} \deg x$$

$x \in |V|$ に値をもつ有理点は $\deg x$ 個あるので，$\sum_{\deg x|n} \deg x$ は $\mathbf{F}_{q^n}$ 有理点の個数を表している.

Q.E.D.

Lemma より $\zeta(X,s) = \prod_p Z(X \bmod p, p^{-s})$．すなわち，Hasse$\zeta$ 関数は閉ファイバーの合同ゼータ関数を掛け合わせたものである.

次に Hasse-Weil$L$ 関数と合同 ζ 関数を結びつける.

Theorem 3.1 (Lefshetz の跡公式) 有限体 $\mathbf{F}_q$ 上の射影非特異多様体 V に対し,

$$\sharp V(\mathbf{F}_q) = \sum_{i=0}^{2\dim V} (-1)^i \mathrm{Tr}(Fr; H^i_{\acute{e}t}(\bar{V}, \mathbf{Q}_l))$$

が成立する.

この定理から直ちに，合同 ζ 関数の有理性が従う．

Theorem 3.2 (合同 ζ 関数の有理性) V を前定理と同様とすると，

$$Z(V,u)=\prod_{i=0}^{2\dim V} P_i(V,u)^{(-1)^{i+1}}$$

$$P_i(V,u)=\det(1-Fru;H^i_{\acute{e}t}(\bar{V},\mathbf{Q}_l))^{-1}$$

が成立する．

上の $P_i(V,u)$ は Hasse-Weil$L$ 関数の定義に出てきた P_v と同じ形をしている．X を代数体 K 上の射影非特異多様体とする．有限個の素点 v を除き X は good reduction をもち，

$$\prod_{v:\text{good}} P_v(H^i_{\acute{e}t}(\bar{X},\mathbf{Q}_l),u)=\prod_v P_v(H^i_{\acute{e}t}(\overline{X \bmod v},\mathbf{Q}_l),u)=\prod_v P_i(X \bmod v,u)$$

よって $L(X,s)$ は悪い素点の因子を除くと $\prod_{v:\text{good}} P_i(X \bmod v, N(v)^{-s})$ に一致する．

以上の準備の下に，Hasse-Weil$L$ 関数と Hasseζ 関数の関係をみる．

X を代数体 K 上の射影非特異多様体とする．X の定義方程式の係数を $\mathcal{O}_K$ にとることにより X は Spec$\mathcal{O}_K$ 上の有限型スキームみなせる．また，射 $\mathbf{Z}\to\mathcal{O}_K$ により $\mathbf{Z}$ 上の有限型スキームとなり，Hasseζ 関数が定義される．ほとんどすべての素点 v において等式

$$P_v(H^i_{\acute{e}t}(\overline{X \bmod v},\mathbf{Q}_l),u)=P_i(X \bmod v,u)$$

が成立するので，$\zeta(X,s)$ と $\prod_{i=0}^{2d} L_i(X,s)^{(-1)^i}$ $(L_i(X,s)=\prod_v P_v(H^i_{\acute{e}t}(X \bar{\bmod}\, v,\mathbf{Q}_l),(Nv)^{-s}))$ はほぼ同じものとみなせる．よって，$L(X,s)$ を $\zeta(X,s)$ の因子として定義するのは妥当といえる．

Pell 曲線は $\mathbf{A}^2_{\mathbf{Z}}$ の閉部分スキーム，$\mathbf{Q}$ 上の代数多様体，どちらともみなせるので，H-WL，Hasseζ ともに定義することができる．先に述べたように H-WL の具体的表示を得るのは困難だが，Hasseζ は容易に計算される．後程この計算を実行し，Pell 曲線の L 関数として何を採用すべきかを考察する．

次節では楕円曲線の L 関数の具体的表示を求め，BSD 予想の内容を述べる．

4 楕円曲線の L 関数と BSD 予想

前節で提示した方針に従って楕円曲線 E の L 関数を計算する．この節では簡単のため定義体を $\mathbf{Q}$ に限定するが，一般の代数体でも議論は同じである．Hasseζ 関数を定義するにはまず $E/\mathbf{Q}$ に $\mathbf{Z}$ スキームを標準的に対応させる必要がある．これは，以下のように定める．

Q 上の楕円曲線 E の Weierstrass 方程式 $y^2=x^3+Ax+B \quad (*)$ を以下の条件を満たすようにとることができる（大域的極小 Weierstrass 方程式）．

1. $A,B\in\mathbf{Z}$
2. この方程式が，各素数 p に対し，係数拡大 $E\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_p$ の極小 Weierstrass 方程式になっている．

$(*)$ は $\mathbf{Z}$ 上のスキーム χ を定め，その閉ファイバー $\chi\otimes k(p)$ は reduction$E \bmod p$ に一致する．閉ファイバー $E \bmod p$ は以下のように分類される．

1. 非特異（good reduction）．
2. 唯一の結節点（node）をもつ（multicative reduction）．これはさらに以下の二つに分類される．
   (a) node における 2 接線が $\mathbf{F}_p$ 上定義される（split）．
   (b) node における 2 接線が $\mathbf{F}_p$ 上定義されない（non-split）．

3. 唯一の尖点（cusp）をもつ（additive reduction）.

Remark 4.1 χ の各閉ファイバーの特異点（有限個）を除去すると $\mathbf{Z}$ 上滑らかなスキーム $\mathcal{E}$ を得る．これは $\mathbf{Z}$ 上の群スキームの構造をもち，$E/\mathbf{Q}$ の Néron model と呼ばれる．

以下 χ の Hasseζ 関数を計算する．$\zeta(\chi, s) = \prod_{p:\text{素数}} Z(\chi \otimes \mathbf{F}_p, p^{-s}) = \zeta(\chi, s) = \prod_{p:\text{素数}} Z(E \bmod p, p^{-s})$．$p$ で good reduction を持つときは，合同 ζ 関数の理論から

$$Z(E \bmod p, p^{-s}) = \frac{1 - a_p p^{-s} + p^{1-s}}{(1-p^{-s})(1-p^{2-s})}$$

$(a_p = p + 1 - \sharp E \bmod p(\mathbf{F}_p))$ となる．P で bad redcution を持つ場合は次のようになる．

Lemma 4.1 各 reduction の型に対し，$N_n = \sharp E \bmod p(\mathbf{F}_{p^n})$ は以下のようになる．

$$N_n = \begin{cases} \sharp \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_p}(\mathbf{F}_{p^n}) - 1 & 2(a) \\ \sharp \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_p}(\mathbf{F}_{p^n}) - (-1)^{n+1} & 2(b) \\ \sharp \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_p}(\mathbf{F}_{p^n}) & 3 \end{cases}$$

Proof. いずれの場合特異点で blow up すると $\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_p}$ に同型となる．blow up で有理点の個数がどう変化するかを見ればよい．3 のとき個数が変化しないのは明らか．$2(a)$ のとき特異点は二つの $\mathbf{F}_p$ 有理点に分裂する．よって各 n に対し $\mathbf{F}_{p^n}$ 有理点は blow up により一つ増える.$2(b)$ のとき．$E \bmod p$ の方程式を $y^2 = f(x) = x^3 + Ax + B$ とおくと，特異点 P の満たす条件は $F(x,y) = y^2 - f(x)$ とおいて $F(P) = \frac{\partial F}{\partial x}(P) = \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 0 \Leftrightarrow b = 0, f(a) = f'(a) = 0$ である．$f'(x)$ は高々二次式なので $a \in \mathbf{F}_{p^2}$．よって P は $\mathbf{F}_{p^2}$ 有理点であり，そこにおける接線の係数も $\mathbf{F}_{p^2}$ に属し，blow up によって P は二つの $\mathbf{F}_{p^2}$ 有理点に分裂する．このことから主張の関係式を得る．

Q.E.D.

Lemma の結果を用いることにより合同 ζ 関数 $Z(E \bmod p, u)$ が計算される．

· $2(a)$ のとき

$$\begin{aligned} \log Z(E \bmod p, u) &= \log Z(\mathbf{P}^1, u) - \sum \frac{u^n}{n} \\ &= -\log(1-u) - \log(1-pu) + \log(1-u) \\ &= \log(1-pu)^{-1} \end{aligned}$$

$\therefore Z = \frac{1}{1-pu}$

· $2(b)$ のとき

$$\begin{aligned} \log Z &= \log Z(\mathbf{P}^1) + \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} u^n \\ &= -\log(1-u) - \log(1-pu) + \log(1+u) \\ &= \log \frac{1+u}{(1-u)(1-pu)} \end{aligned}$$

$\therefore Z = \frac{1+u}{(1-u)(1-pu)}$

· 3 のとき
$Z = Z(\mathbf{P}^1) = \frac{1}{(1-u)(1-pu)}$

退化したファイバーについても，分母を $(1-u)(1-pu)$ としたときの分子を $H^1_{ét}$ への Frobenius 作用から定まる L 関数の因子だとみなせば，$L(E \bmod p, u)$ の値は $2(a)$ のとき $1-u$，$2(b)$ のとき $1+u$，3 のとき 1 となる．よって

$$L(E,s) = \prod_{p:\text{good}} (1-a_p p^{-s}+p^{1-s})^{-1} \cdot \prod_{p:\text{type2}(a)} (1-p^{-s})^{-1} \cdot \prod_{p:\text{type2}(b)} (1+p^{-s})^{-1}$$

$L(E,s)$ の収束域については次が成り立つ．

Theorem 4.1 $L(E,s)$ は $Re(s) > \frac{3}{2}$ で収束する．

Proof. $\prod_{p:\text{good}}(1-a_p p^{-s}+p^{1-s})^{-1}$ が収束することを言えばよい．合同 ζ 関数のリーマン予想の結果によれば $1-a_p u + pu^2 = 0$ の根 α_p の絶対値は $\sqrt{p}$ である．

$$\prod_{p:\text{good}} (1-a_p p^{-s}+p^{1-s})^{-1} = \prod_{p:\text{good}} (1-\alpha_p p^{-s})^{-1} \cdot \prod_{p:\text{good}} (1+\alpha_p p^{-s})^{-1}$$

右辺の二つの無限積は $|\alpha_p p^{-s}| < p^{-1}$ のとき収束する．$|\alpha_p p^{-s}| < p^{-1} \Leftrightarrow p^{\frac{1}{2}-Re(s)} < p^{-1} \Leftrightarrow Re(s) > \frac{3}{2}$.

Q.E.D.

BSD 予想は二つの主張から成る．

Conjecture 4.1 (BSD 予想) 代数体 K 上の楕円曲線 E に対し以下が成り立つ．

1. $L(E,s)$ は $s=1$ まで有理型接続され，$s=1$ は位数が $\mathrm{rank}_{\mathbf{Z}} E(K)$ のゼロ点である．

2. $r := \mathrm{rank}_{\mathbf{Z}} E(K)$ とおくと

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^{-r} L(E,s) = \frac{R\Omega c}{(\sharp E(K)_{\text{tors}})^2} \sharp Ш(E)$$

が成り立つ．ここに現れる記号の意味は以下のとおり．

- $c = \prod_v c_v$
  c_v は有限素点に対して定義されるファッジ因子と呼ばれる量である，E/K の係数拡大 $E \otimes_K K_v$ に付随する不変量である．v 進積分との関係で後に定義する．ここでは，E が v で good reduction を持つときは $c_v = 1$ であり無限積は well-defined であることだけ指摘しておく．

- R は elliptic regulator と呼ばれるもので，$E(K)/E(K)_{\text{tors}}$ の自由基底を $P_1, \ldots, P_r$ として，

$$R = \det(< P_i, P_j >)_{1 \le i,j \le r}$$

  により定義される．ここに，$<,>: E(K) \times E(K) \to \mathbf{R}$ は Néron-Tate height pairing である．

- $Ш(E)$ は E の Tate-Shafarevich 群と呼ばれるものである．定義は後に行う．

- Ω は E の Néron 微分を ω として，

$$\Omega = \int_{E(\mathbf{R})} |\omega|$$

  により定義される．Néron 微分とは，E の Néron model$\mathcal{E}/\mathfrak{o}_K$ の $\mathfrak{o}_K$ 上の相対微分の層 $\Omega_{\mathcal{E}/\mathfrak{o}_K}$ の global section$\Gamma(\mathcal{E}, \Omega_{\mathcal{E}/\mathfrak{o}_K})$ の生成元のことである（符号を除いて一意）．

- $E(K)_{\text{tors}}$ は $E(K)$ の位数有限の元が成す部分群.

5 Pell 曲線の L 関数と Dirichlet$L$ 関数

前節では楕円曲線 $E/\mathbf{Q}$ の L 関数を，その $\mathbf{Z}$ 上の model の Hasseζ 関数の因子として間接的に求めた．Pell 曲線の L 関数も同様の方針で求める．

Pell 方程式 $x^2-\Delta y^2=4(*)$ は本来の Pell 方程式

$$(**)\begin{cases} x^2-\frac{\Delta}{4}y^2=1 & (\Delta\equiv 0(\mathrm{mod}4)) \\ x^2+xy+\frac{1-\Delta}{4}y^2=1 & (\Delta\equiv 1(\mathrm{mod}4)) \end{cases}$$

を同時に扱うために便宜上導入されたものである．以下で Pell 曲線の mod$p$ reduction を考察するが，$p=2$ のときは $(*)$ と $(**)$ の間のアフィン変換が退化し同型でなくなる．この事情を考慮して，$p=2$ のときに限り定義式として $(**)$ を採用する．

Lemma 5.1 $C \bmod p$ の $\mathbf{F}_{p^n}$ 有理点の個数 N_n は以下のようになる．

$$N_n=\begin{cases} p^n-(\frac{\Delta}{p})^n & p\nmid\Delta \\ 2p^n & p\neq 2, p\mid\Delta \\ 2^n & p=2, 2\mid\Delta \end{cases}$$

ただし，$2\nmid\Delta$ のとき $(\frac{\Delta}{2})=(-1)^{\frac{\Delta^2-1}{8}}$ である．

Proof. $C \bmod p$ の射影化を $\tilde{C}$ とする．

- $p\neq 2$ かつ $p\nmid\Delta$ のとき
  $\tilde{C}$ は非特異であり，従って，$\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_p}$ と同型である．よって $\tilde{C}$ の $\mathbf{F}_{p^n}$ 有理点の個数は (p^n+1) 個．N_n はこれから無限遠有理点の個数を差し引けば良い．無限遠有理点は方程式 $x^2-\Delta y^2=0$ の非自明な解，すなわち，$x^2=\Delta$ の解に対応.

  1. $(\frac{\Delta}{p})=1$ のとき
     $x^2=\Delta$ は $\mathbf{F}_{p^n}$ に二つの相異なる解をもつ．よって，
     $$N_n=(p^n+1)-2=p^n-1=p^n-\left(\frac{\Delta}{p}\right)^n$$
  2. $(\frac{\Delta}{p})=-1$ のとき
     $\mathbf{F}_p$ の有限次拡大体間の包含関係を考慮すると，$x^2-\Delta=0$ は $\mathbf{F}_{p^n}$（n：偶）で異なる二つの解を持ち，$\mathbf{F}_{p^n}$（n：奇）では解を持たない．以上より無限遠有理点の個数は $1+(\frac{\Delta}{p})^n$ と書ける．よって，
     $$N_n=(p^n+1)-(1+\left(\frac{\Delta}{p}\right)^n)=p^n-\left(\frac{\Delta}{p}\right)^n.$$

- $p\neq 2$ かつ $p\mid\Delta$ のとき
  定義方程式は $x^2=4(\mathrm{mod}p)$ となり，$x=2,-2(p\neq 2$ より $2\neq -2$ であることに注意）．y は任意であるから $N_n=2\times p^n=2p^n$.

- $p=2$ のとき

  1. $2\mid\Delta$ のとき
     定義方程式は
     $$\begin{cases} x^2=1 & (\frac{\Delta}{4}\equiv 2(\mathrm{mod}4)) \\ x^2+y^2=1 & (\frac{\Delta}{4}\equiv 3(\mathrm{mod}4)) \end{cases}$$
     $x^2=1\Leftrightarrow x=1, x^2+y^2=1\Leftrightarrow (x+y)^2=1\Leftrightarrow x+y=1$ であるからいずれの場合も $N_n=p^n$ である．

2. $2 \nmid \Delta$ のとき
定義方程式は

$$\begin{cases} x^2+xy=1 & (\Delta \equiv 1(\mathrm{mod} 8)) \\ x^2+xy+y^2=1 & (\Delta \equiv 5(\mathrm{mod} 8)) \end{cases}$$

となる．いずれの場合も $\tilde{C}$ は非特異である．よって先程同様無限遠有理点の個数を調べればよい．

- $\Delta \equiv 1(\mathrm{mod} 8)$ のとき
  $x^2+x=0$ は $\mathbf{F}_2$ に異なる 2 つの解をもつので $N_n=(2^n+1)-2=2^n-1$.
- $\Delta \equiv 5(\mathrm{mod} 8)$ のとき
  $x^2+x+1=0$ は $\mathbf{F}_2$ に解をもたないので，$\mathbf{F}_2(n:$ 偶数$)$ で異なる二つの解をもち $\mathbf{F}_2(n:$ 奇数$)$ では解をもたない．$N_n=(2^n+1)-(1+(-1)^n)=2^n-(-1)^n$.

$$\left(\frac{\Delta}{2}\right)=(-1)^{\frac{\Delta^2-1}{8}}=\begin{cases} 1 & (\Delta \equiv 1(\mathrm{mod} 8)) \\ -1 & (\Delta \equiv 5(\mathrm{mod} 8)) \end{cases}$$

より，合わせると $N_n=2^n-\left(\frac{\Delta}{2}\right)^n$.

Q.E.D.

以上の結果から $\zeta(C,s)$ を計算できる．

Propostion 5.1

$$\zeta(C,s)=\begin{cases} \prod_{p\mid\Delta}\frac{1}{(1-p^{1-s})^2}\prod_{p\nmid\Delta}\frac{1-(\frac{\Delta}{p})p^{-s}}{1-p^{1-s}} & (\Delta \equiv 1(\mathrm{mod} 4)) \\ \frac{1}{1-2^{1-s}}\prod_{p\neq 2,p\mid\Delta}\frac{1}{(1-p^{1-s})^2}\prod_{p\nmid\Delta}\frac{1-(\frac{\Delta}{p})p^{-s}}{1-p^{1-s}} & (\Delta \equiv 0(\mathrm{mod} 4)) \end{cases}$$

Proof. Lemma の結果を用いて $C \bmod p$ の合同 ζ 関数を計算し掛け合わせればよい．

- $p \neq 2, p \nmid \Delta$ のとき

$$\begin{aligned} \log Z(C \bmod p,u) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_n}{n}u^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n-(\frac{\Delta}{p})^n}{n}u^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(pu)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((\frac{\Delta}{p})u)^n}{n} \\ &= -\log(1-pu)+\log(1-\left(\frac{\Delta}{p}\right)u)=\log\left(\frac{1-(\frac{\Delta}{p})u}{1-pu}\right). \end{aligned}$$

$\therefore Z(C \bmod p,u)=\frac{1-(\frac{\Delta}{p})u}{1-pu}$．$u=p^{-s}$ を代入すれば，$Z(C \bmod p,p^{-s})=\frac{1-(\frac{\Delta}{p})p^{-s}}{1-p^{1-s}}$.

- $p \neq 2, p \mid \Delta$ のとき

$$\begin{aligned} \log Z(C \bmod p,u) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2p^n}{n}u^n=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(pu)^n}{n} \\ &= -2\log(1-pu)=\log(1-pu)^{-2}. \end{aligned}$$

$\therefore Z(C \bmod p,u)=\frac{1}{(1-pu)^2}$．$u=p^{-s}$ を代入すれば，$Z(C \bmod p,u)=\frac{1}{(1-p^{1-s})^2}$.

$p=2$ のときもまったく同様の計算の結果,

$$Z(C \bmod p, u) = \begin{cases} \frac{1}{1-2^{1-s}} & (2 \mid \Delta) \\ \frac{1-(\frac{\Delta}{2})2^{-s}}{1-2^{1-s}} & (2 \nmid \Delta). \end{cases}$$

Q.E.D.

得られた $\zeta(C,s)$ の表示式を如何に解釈し，どの因子を $H^1_{ét}$ への Frobenius 作用が定める L 関数とみなすべきかを，非厳密的にならざるを得ないが考察していく．

まず $p|\Delta$ に対応する因子を考察する．

$p \neq 2$ のときは reduction は異なる二本のアフィン直線になり，$p=2$ のときは重なった二本のアフィン直線になる．従ってそれぞれの合同 ζ 関数はアフィン直線 $\mathbf{A}_{\mathbf{F}_p}$ の合同 ζ 関数 $\frac{1}{1-pu}$ の冪になっている．$p|\Delta$ の因子は L 関数に寄与しないと考えることにする．

次に $p \nmid \Delta$ に対応する因子を考察する．こちらは $\mathbf{A}_{\mathbf{F}_p}$ の合同 ζ 関数に $1-(\frac{\Delta}{p})p^{-s}$ を掛けたものになっているのでこの部分を $C \bmod p$ のアフィン直線からのコホモロジー的なずれと解釈し，L 関数に組み込むことにする．従ってこの論文においては Pell 曲線の L 関数を

$$L(C,s) = \prod_{p \nmid \Delta} (1 - \Big(\frac{\Delta}{p}\Big) p^{-s})^{-1}$$

と定義する．

Remark 5.1 Kronecker 指標 χ を導入すれば

$$L(C,s) = \prod_{p \nmid \Delta} (1-\chi(p)p^{-s})^{-1} = L(s,\chi)$$

であり，Dirichlet$L$ 関数に一致する．

6 Selmer 群と Tate-Shafarevich 群

6.1 楕円曲線の場合

K を代数体，E, E' を K 上の楕円曲線とする．ϕ を E から E' への非自明な同種写像とする．$G_{\bar{K}/K} = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow E[\phi] \longrightarrow E \xrightarrow{\phi} E' \longrightarrow 0$$

から Galois cohomorogy の長完全列

$$\begin{array}{lcccccc} 0 \longrightarrow & E(K)[\phi] & \longrightarrow & E(K) & \xrightarrow{\phi} & E'(K) \\ \longrightarrow & H^1(G_{\bar{K}/K}, E[\phi]) & \longrightarrow & H^1(G_{\bar{K}/K}, E) & \xrightarrow{\phi} & H^1(G_{\bar{K}/K}, E') \\ \longrightarrow & \cdots & & & & \end{array}$$

が得られる．ここで $\ker(H^1(G_{\bar{K}/K}, E) \xrightarrow{\phi} H^1(G_{\bar{K}/K}, E'))$ を $H^1(G_{\bar{K}/K}, E)[\phi]$ とおくと，短完全列

$$0 \longrightarrow E'(K)/\phi E(K) \xrightarrow{\delta} H^1(G_{\bar{K}/K}, E[\phi]) \longrightarrow H^1(G_{\bar{K}/K}, E')[\phi] \longrightarrow 0$$

を得る．

ここで $H^1(G,E)$ は E/K の homogeneous space が成す Weil-Chalet 群 $WC(E/K)$ と同一視される．

$$0 \longrightarrow E'(K)/\phi E(K) \xrightarrow{\delta} H^1(G_{\bar{K}/K}, E[\phi]) \longrightarrow WC(E/K)[\phi] \longrightarrow 0$$

K の素点 v の $\bar{K}$ への拡張を一つ固定し，同じ v で表す．v の分解群 G_v は $E(\bar{K_v})$，$E'(\bar{K_v})$ に作用するので同様の完全列

$$0 \longrightarrow E'(K_v)/\phi E(K_v) \xrightarrow{\delta} H^1(G_v, E[\phi]) \longrightarrow WC(E/K_v)[\phi] \longrightarrow 0$$

を得る．$G_v \subset G_{\bar{K}/K}$ は Galois cohomology の制限射を誘導するので，可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & E'(K)/\phi E(K) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G_{\bar{K}/K}, E[\phi]) & \longrightarrow & WC(E/K) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \prod_v E'(K_v)/\phi E(K_v) & \xrightarrow{\delta} & \prod_v H^1(G_v, E[\phi]) & \longrightarrow & \prod_v WC(E/K_v)[\phi] & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

を得る．

Definition 6.1 上の図式において，ϕ-Selmer 群 $\mathrm{Sel}_\phi(E/K)$ 及び ϕ-Tate-Shararevich 群 $Ш_\phi(E/K)$ を，

$$\mathrm{Sel}_\phi(E/K) = \ker\Big(\prod_v H^1(G_{\bar{K}/K}, E[\phi]) \to \prod_v WC(E/K_v)[\phi]\Big)$$

$$Ш_\phi(E/K) = \ker\Big(WC(E/K) \to \prod_v WC(E/K_v)[\phi]\Big)$$

により定義する．

定義より，列

$$0 \longrightarrow E'(K)/\phi E(K) \longrightarrow \mathrm{Sel}_\phi(E/K) \longrightarrow Ш_\phi(E/K) \longrightarrow 0$$

は完全である．

Remark 6.1

1. $\mathrm{Sel}_\phi(E/K)$ は $H^1(G_{\bar{K}/K}, E[\phi])$ の部分群なので ϕ に依存して決まる群である．一方 $Ш_\phi(E/K)$ の方は ϕ に依存しない群

$$Ш(E/K) \overset{\text{def}}{=} \ker\Big(WC(E/K) \to \prod_v WC(E/K_v)\Big)$$

を定義することにより $Ш_\phi(E/K)$ を $Ш(E/K)$ の部分群とみなすことができる．$Ш(E/K)$ を Tate-Shafarevich 群と呼ぶ．

2. $WC(E/K)$ の元 C/K は C が K 有理点を持つとき，そのときに限り E/K と K 上同型になり，自明となる．このことから，$Ш(E/K)$ は斉次空間 C で至る所局所的に有理点をもつが有理点はもたないものから構成される．従って $Ш(E/K)$ は Hasse の原理からのずれをあらわすものと解釈される．

3. $E = E'$，$\phi = [m]$（m 倍写像）とした場合の完全列

$$0 \longrightarrow E'(K)/mE(K) \xrightarrow{\delta} H^1(G_{\bar{K}/K}, E[m]) \longrightarrow H^1(G_{\bar{K}/K}, E)[m] \longrightarrow 0$$

は E/mE の有限性 (weak Mordell-Weil theorem) を示す際に用いられ，特に重要である．

6.2 Pell 曲線の場合

$\mathbf{Q}$ 上の Pell 曲線 C に対しても，同様の Galois cohomology の完全列

$$0 \longrightarrow C[m] \longrightarrow C \xrightarrow{\times m} C \longrightarrow 0$$

が存在し，まったく同様に m-Selmer 群，T-S 群が定義される．しかし，次の点が楕円曲線の場合と著しく異なる．

Theorem 6.1 $Ш(C)$ は自明である．

Proof. $\text{Ш}(C)$ の元を一つとり，その代表元を C' とする．C' は $\bar{\mathbf{Q}}$ 上 C と同型な $\mathbf{Q}$ 上の曲線であるので，特にアフィン二次曲線である．これに対しては Hasse の原理が成り立つので，C' は $\mathbf{Q}$ 有理点をもつ．すなわち自明.

Q.E.D.

Theorem より Pell 曲線 $C/\mathbf{Q}$ に対しては

$$\mathrm{Sel}_m(C) \simeq C(\mathbf{Q})/mC(\mathbf{Q}) \qquad\qquad \text{Ш}(C) = 1$$

となり，これらの群を考えることは無意味となる．そこで，Pell 曲線に対しては定義を修正することにする．Introduction で述べたように，我々の立場は $E(\mathbf{Q})$ と $C(\mathbf{Z})$ を対比させる というものだった．従って商 $C(\mathbf{Q})/mC(\mathbf{Q})$ を考えるよりも商 $C(\mathbf{Z})/mC(\mathbf{Z})$ を考えるべきである．$C(\mathbf{Z})/mC(\mathbf{Z})$ は $C(\mathbf{Q})/mC(\mathbf{Q})$ の部分群とみなせるので，完全列

$$0 \longrightarrow C(\mathbf{Z})/mC(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Sel}_m(C)$$

を得る．そこで，この Cokernel によって m-Tate-Shafarevich 群 $\text{Ш}_m(C)$ を定義する．すると E/K と同様の完全列

$$0 \longrightarrow C(\mathbf{Z})/mC(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Sel}_m(C) \longrightarrow \text{Ш}_m(C) \longrightarrow 0$$

が成り立つ.

6.3 Pell 曲線における Selmer,T-S 群の意味及び具体例による計算

前節で定義した $\mathrm{Sel}_m(C)$,$\text{Ш}_m(C)$ の解釈，計算を行う．まず，もっとも簡単な $m=2$ の場合を考察する．

$\mathrm{Sel}_2(C/\mathbf{Q})$ は $H^1(G_{\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}, C[2])$ の部分群である．まずは $H^1(G_{\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}, C[2])$ をわかりやすい群 $\mathbf{Q}^\times/(\mathbf{Q}^\times)^2$ に置き換える操作を行う.

Lemma 6.1 自然な群同型 $H^1(G_{\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}, C[2]) \simeq \mathbf{Q}^\times/(\mathbf{Q}^\times)^2$ が存在する.

Proof. $\mathbf{Q}^\times$ の Kummer 完全列 $0 \to \{\pm 1\} \to \bar{\mathbf{Q}}^\times \overset{2\text{乗}}{\to} \bar{\mathbf{Q}}^\times \to 0$ から次の Galois cohomology の完全列を得る.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \{\pm 1\} & \longrightarrow & \mathbf{Q}^\times & \xrightarrow{2\text{乗}} & \mathbf{Q}^\times \\ & \longrightarrow & H^1(G_{\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}, \{\pm 1\}) & \longrightarrow & H^1(G_{\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{Q}}^\times) & \longrightarrow & H^1(G_{\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}^\times) \\ & \longrightarrow & \dots & & & & \end{array}$$

ここで Hilbert's satz 90 により $H^1(G_{\bar{\mathbf{Q}}/\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}^\times) = 0$ だから同型 $\mathbf{Q}^\times/(\mathbf{Q}^\times)^2 \simeq H^1(G_{\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}, \pm 1)$ が成立．$C[2] = \{(\pm 2, 0)\}$ と $\{\pm 1\}$ には $G_{\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}$ が自明に作用するので，$G_{\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}$ 加群として同型である．従って $H^1(G_{\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}, C[2]) \simeq H^1(G_{\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}, \{\pm 1\})$ が成立．$\therefore H^1(G_{\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}, C[2]) \simeq \mathbf{Q}^\times/(\mathbf{Q}^\times)^2$.

Q.E.D.

この同一視に立脚して，$C(\mathbf{Q}) \overset{\delta}{\to} \mathbf{Q}^\times/(\mathbf{Q}^\times)^2$ の計算を行う.

Propostion 6.1 $P = (r, s) \in C(\mathbf{Q})$ に対し,

$$\delta(r,s) = \begin{cases} (r+2)(\mathbf{Q}^\times)^2 & (r \neq -2) \\ -\Delta(\mathbf{Q}^\times)^2 & (r = -2) \end{cases}$$

Proof. 二倍写像 $C(\bar{\mathbf{Q}}) \overset{2}{\to} C(\bar{\mathbf{Q}})$ は全射であるから，$P = 2Q$ をみたす $Q \in C(\bar{\mathbf{Q}})$ がとれる．1-cocycle $\delta(P) \in H^1(G, C[2])$ は $\delta(P)(\sigma) = Q^{1-\sigma}$ により定義される．以下 $Q^{1-\sigma}$ を P の座標 (r, s) を用いて具体的に記述する．二倍写像は $2(x, y) = (x^2 - 2, xy)$ である．従って Q の座標 (x, y) は $x^2 - 2 = r, xy = s$ を満たす．すなわち

$$Q = \begin{cases} (\sqrt{r+2}, \frac{s}{\sqrt{r+2}}) & (r \neq -2 \Leftrightarrow P = -1) \\ (\Delta, \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}) & (P = -1) \end{cases}$$

・$P \neq -1$ のとき

$$Q^{1-\sigma} = Q - Q^{\sigma} = (\sqrt{r+2}, \frac{s}{\sqrt{r+2}}) - (\sqrt{r+2}^{\sigma}, \frac{s}{\sqrt{r+2}^{\sigma}}) = \begin{cases} (2,0) & (\sqrt{r+2}^{\sigma} = \sqrt{r+2}) \\ (-2,0) & (\sqrt{r+2}^{\sigma} = -\sqrt{r+2}). \end{cases}$$

・$P = -1$ のとき

$$Q^{1-\sigma} = \begin{cases} (2,0) & (\sqrt{-\Delta}^{\sigma} = \sqrt{-\Delta}) \\ (-2,0) & (\sqrt{-\Delta}^{\sigma} = -\sqrt{-\Delta}). \end{cases}$$

以上より $C(\mathbf{Q}) \xrightarrow{\delta} \mathbf{Q}^{\times}/(\mathbf{Q}^{\times})^2$ は

$$Q = \begin{cases} (r+2)(\mathbf{Q}^{\times})^2 & (r \neq -2) \\ -\Delta(\mathbf{Q}^{\times})^2 & (r = -2). \end{cases}$$

Q.E.D.

Pell 方程式，Weierstrass 方程式の解法に「降下法」と呼ばれるものがある．これはディオファントス方程式の整数解をより簡単な（解きやすい）方程式の解に帰着させる手法一般のことで，Pell 自身が最初に用いた．ここでは Proposition で考察した連結射 $C(\mathbf{Q}) \xrightarrow{\delta} \mathbf{Q}^{\times}/(\mathbf{Q}^{\times})^2$ が降下法の現代的定式化であることを付記しておく．

ディオファントス方程式論では整数解を主に扱うので，$C(\mathbf{Q})$ ではなく $C(\mathbf{Z})$ に注目する．$(x,y) \in C(\mathbf{Z})$ の δ による像は $(x+2)(\mathbf{Q}^{\times})^2$ であった．$x+2 = ar^2(a, r \in \mathbf{Z}, a : \text{square free})$ をみたす a が一意に定まる．これを Pell 方程式に代入すると $\Delta y^2 = (x+2)(x-2) = ar^2(ar^2-4) \quad (*)$ となる．

Lemma 6.2 $(*)$ から $a \mid \Delta, r \mid y$ が従い，$\Delta = ab, y = rs$ とおけば r, s は方程式

$$ar^2 - bs^2 = 4$$

を満たす．

Proof. まず $a \mid \Delta$ を示す．a の素因子 p が Δ を割ることをいえばよい．

・p が奇素数のとき
$p \nmid \Delta$ と仮定すると $y \mid \Delta$．よって左辺は p を偶数個含む．一方右辺は $x+2 \neq x-2 (\mathrm{mod} p)$ 及び $p \mid ar^2 = (x+2)$ から $p \nmid (x-2)$ であり p を奇数個含むので，矛盾．背理法により $p \mid \Delta$.

・$p = 2$ のとき
$2 \nmid \Delta$ と仮定する．$2 \mid y$ より $y = 2y', a = 2a'$ とおくと $\Delta y'^2 = a'r^2(a'r^2 - 2)$ を得る．1 と同様の議論により $a' \mid \Delta$ が従うので $\Delta = a'b$ と置くと，$by'^2 = r^2(a'r^2-2)$．b は square free なので $r \mid y'$．$y' = rs$ と置くと $bs^2 = a'r^2 - 2 \Leftrightarrow a'r^2 - bs^2 = 2$ となる．ここで両辺の mod4 をとると，a', b は奇数なので $a'^2, b^2 \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$．また，$r^2, s^2 \equiv 0, 1 (\mathrm{mod} 4)$．よって $a'r^2 - bs^2 \equiv r^2 - s^2 \neq 2$

以上より $a \mid \Delta$ なので $\Delta = ab$ とおき方程式に代入すると $by^2 = r^2(ar^2-4)$.

次に r, s が上記方程式を満たすことを示す.

・b が square free のとき
$r \mid y$ より $y = rs$ と置くと $br^2s^2 = r^2(ar^2-4) \Leftrightarrow ar^2 - bs^2 = 4 \quad (ab = \Delta)$.

・b が square free でないとき，すなわち $4 \mid b$ のとき
$b = 4b'$ とおく．r が奇数だとすると右辺は奇数となり矛盾するので r は偶数．$r = 2r'$ と置く．$b'y^2 = r'^2(4ar'^2-4) = (2r')^2(ar'^2-1)$．$b$:square free より，$(2r') \mid y$．$y = 2r's$ と置くと $b'(2r')^2s^2 = (2r')^2(ar'^2-1) \Leftrightarrow ar'^2 - b's^2 = 1 \Leftrightarrow ar^2 - (4b')s^2 = 4 \quad (\Delta = ab = a \cdot 4b')$.

Q.E.D.

従っていずれの場合も整数解 (x,y) に対して

$$(*) \begin{cases} x+2=ar^2 \quad (a: \text{squarefree}) \\ y=rs \end{cases}$$

により (r,s) を定義すれば，これは方程式 $ar^2-bs^2=4 \quad (ab=\Delta) \quad (**)$ の解になっている．また逆に $(**)$ の解 (r,s) に対し (x,y) を $(*)$ により定めれば，それが Pell 方程式の解になっていることもわかる．

関係 $ab=\Delta$ から a が定まれば b は自動的に定まる．よって $(**)$ 型の方程式は Δ の正因子 a と一対一対応する．特にその個数は有限である．

Definition 6.2 Pell 方程式 $x^2-\Delta y^2=4$ に対し，方程式の族

$$\mathbf{T}_a : ar^2-bs^2=4 \quad (a,b \in \mathbf{Z}, ab=\Delta)$$

を 2-decent と呼ぶ.

$\mathbf{T}_a$ の構成からわかるように「$\mathbf{T}_a$が有理解をもつ $\Leftrightarrow a(\mathbf{Q}^\times)^2 \in \mathrm{Im}\delta$」が成立する．$\mathrm{Im}\delta=\mathrm{Sel}_2(C)$ だったから，$\mathrm{Sel}_2(C)=\{a(\mathbf{Q}^\times)^2; \mathbf{T}_a$が<u>有理点</u>をもつ$\}$ という解釈が成される．また δ による $C(\mathbf{Z})$ の像は $\{a(\mathbf{Q}^\times)^2; \mathbf{T}_a$が<u>整点</u>をもつ$\}$ となる．このように解釈すれば，2-Tate-Shafarevich 群 $\text{Ш}_2(C/\mathbf{Q})$ は 2-decent の中での <u>有理点と整点との差</u> を表す群であると解釈できる．

7 Tate-Shafarevich 群の解釈

Lemma 7.1 $k=\mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ とする．

$$\begin{aligned} Cl : \mathrm{Sel}_2(C) &\to Cl^+(k)[2] \\ \mathrm{T}_a &\mapsto (\text{ノルムが } a \text{ のイデアルの類}) \end{aligned}$$

が well-defined で準同型である．

Proof. Δ を割る素数は k において $(p)=\mathfrak{p}^2$ と分解される．よって $p=N\mathfrak{p}$．これを満たすイデアルは $\mathfrak{p}$ に限られる．$a=\prod p_i, (p_i)=\mathfrak{p}_i^2$ ならば $\mathfrak{a}=\prod \mathfrak{p}_i$ が条件をみたす唯一のイデアル．対応 $\mathbf{T}_a \mapsto \mathfrak{a}$ が順同型であることは明らか.

Q.E.D.

Remark 7.1 $\mathrm{Sel}_2(C)$ は位数 2 の群なので Cl の像は $Cl^+(k)[2]$ に属す.

Lemma 7.2 Cl の像は $Cl^+(k)^2$ に属す.

Proof. $\mathrm{Sel}_2(C)$ の定義より $\exists (r,s) \in \mathbf{Q}^2 \quad s.t. \quad ar^2-bs^2=4$．これは $a=(\frac{ar}{2})^2-\Delta(\frac{s}{2})^2=N(\frac{ar}{2}-\sqrt{\Delta}\frac{s}{2}) =: N\lambda$ と変形される．$Cl(a)=\mathfrak{a}$ とおくと $N(\mathfrak{a})=N\lambda$．Genus theory から $\mathfrak{a} \overset{+}{\sim} \mathfrak{c}^2$ を満たすイデアル $\mathfrak{c}$ が存在する.

Q.E.D.

以上より Cl の像は $Cl^+(k)[2] \cap Cl^+(k)^2 = Cl^+(k)^2[2]$ に属す.

Propostion 7.1 系列

$$0 \longrightarrow W_2(C) \longrightarrow \mathrm{Sel}_2(C) \xrightarrow{Cl} Cl^+(k)^2[2] \longrightarrow 0$$

は完全である.

· $\mathrm{Sel}_2(C) \to Cl^+(k)^2$ の全射性.

$Cl^+(k)^2$ の元の代表元として $(\frac{\Delta}{p}) = -1$ 型の素数では割り切れないものがとれる．$\bar{\mathfrak{a}} \in Cl^+(k)^2[2]$ とする（$\mathfrak{a}$ はそのようにとる）．$\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{c}}^2$ とすると $\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{c}^2(\lambda : \text{総正})$ とかけ，$N\mathfrak{a} = N\lambda \cdot N\mathfrak{c}^2 = N(N\mathfrak{c} \cdot \lambda) = N\lambda'(\lambda' := N\mathfrak{c} \cdot \lambda : \text{総正})$．$a = N\mathfrak{a}$ とおくと $a = N\lambda'$ であるが，このことから $ax^2 - \frac{\Delta}{a}y^2 = 4$ が有理解を持つことが従う．後は $b := \frac{\Delta}{a}$ が整数すなわち $a \mid \Delta$ を示せばよい．ここで $\mathfrak{a}^2 \overset{+}{\sim} 1$ を用いる．$\mathfrak{a}^\sigma \overset{+}{\sim} \mathfrak{a}^{-1}$ から $\mathfrak{a} \overset{+}{\sim} \mathfrak{a}^{1-\sigma} \overset{+}{\sim} 1 \Leftrightarrow \mathfrak{a} \overset{+}{\sim} \mathfrak{a}^\sigma$．はじめの仮定から $\mathfrak{a}$ は素因子として完全分解または分岐する素イデアルしか持たないので，最後の関係式は分岐する素イデアルしか含まないことを示す.

· $\ker Cl = W_2$

$\mathfrak{a} \in \ker Cl \Leftrightarrow N\mathfrak{a} = a(\mathfrak{a} : \text{単項イデアル}) \Leftrightarrow ar^2 - bs^2 = 4$ が整数解をもつ.

Q.E.D.

Proposition から次の定理を得る.

Theorem 7.1 同型 $\text{Ш}_2(C) \simeq Cl^+(k)^2[2]$ が成立する.

この結果から任意の m 倍写像に対して $\text{Ш}_m(C) \simeq Cl^+(k)^2[m]$ が成り立つと期待される．更に写像に依存しない群 $\text{Ш}(C)$ が C の内在的な群として定義され，同型 $\text{Ш}(C) \simeq Cl^+(k)^2$ が成り立つことが期待される.

8　v 進積分とファッジ因子

8.1　楕円曲線のファッジ因子

ファッジ因子は完備局所体上の楕円曲線に対して定義される．K を完備局所体，その剰余体を k とする．E を K 上の楕円曲線とする．E の reduction を $\tilde{E}$ とすると，自然な順同型 red : $E \to \tilde{E}$ が定義される（reduction map）．$E_0(K) := \{P \in E(K); \mathrm{red}(P)$ が非特異 $\}$ は $E(K)$ の部分群を成す.

Definition 8.1 (ファッジ因子) $c(E/K) := [E(K) : E_0(K)]$ を E/K のファッジ因子とよぶ.

Remark 8.1 E/K が good reduction を持つときは $E_0(K) = E(K)$，すなわち，$c(E/K) = 1$ である.

ファッジ因子の定義は上のものが一般的であるが，ほかの解釈も可能である.

解釈 1 $c(E/K)$ は $\tilde{E}$ の非特異部分 $\tilde{E}_{ns}$ の連結成分の個数に一致する.

解釈 2 reduction $\tilde{E}$ の型にしたがって，既述のように局所 L 因子 $L_v(s)$ を定める．また，ω を E の Néron 微分とする．このとき，

$$c(E/K) = L_v(1) \cdot \int_{E(K)} |\omega|$$

が成立する.

Pell 曲線に対してもファッジ因子の対応物を定義したい．上のどの定義に従うべきか明確な指導原理はないが，局所 L 因子や v 進積分は大域体上の代数多様体一般に定義することができ汎用性が高いと思われるので，ここでは最後の関係式 $c_v = L_v(1) \int |\omega|$ を定義式と考えることにしたい.

8.2 v 進積分

この節では，v 進積分の一般論について概説する．

k を大域体（代数体または有限体上の一変数代数関数体）とし，V を k 上の非特異多様体 $(d = \dim V)$ とする．V の素点 v を一つ固定する．P を V の k_v 有理点とし，その周りにおける微分形式の積分を以下のように定義する．P の周りの局所座標を $x = (x_1, \ldots, x_n)$ とする $(P = (a_1, \ldots, a_n))$．P の近傍で定義された k 上の d 次正則微分形式 $\omega = f(x)dx_1 \ldots dx_n$ を考える．ここで局所コンパクト空間 k_v^d における P の近傍 U を以下を満たすようにとることができる．

- $(U; (x_1, \ldots, x_n))$ は P の $V(k_v)$ における座標近傍である．
- $f(x)$ は U で収束する．

このような U 内において，ω の v 進積分

$$\int \omega \overset{\text{def}}{=} \int |f(x)|_v (dx_1)_v \ldots (dx_n)_v$$

が定義される．ここで $(dx)_v$ は k_v 上の Haar measure であり，

$$(dx)_v = \begin{cases} dx & (k_v = \mathbf{R}) \\ idz \wedge d\bar{z} & (k_v = \mathbf{C}) \\ \int_{r_v} (dx)_v = 1 & (v : \text{finite}) \end{cases}$$

と正規化されている．

Definition 8.2 V 上の正則かつ至る所 0 でない最大次微分形式を gauge form と呼ぶ.

gauge form ω に対しては V 上の積分 $\int_{V(k_v)} \omega$ が定義される．

Remark 8.2 1. 上では $V(k_v)$ 上で積分したが，k_v の整数環を r_v として，$V(r_v)$ 上の積分もまったく同様に考えることができる．この場合積分値を $\tilde{V} = V \bmod v$ の有理点の個数と関係付けることができる（後述）．

2. 楕円曲線 E/K の場合，射影空間に埋め込まれるので有理点と整点の差異はない．従って $\int_{E(K)} \omega = \int_{E(R)} \omega$ である．

Pell 曲線 C は affine なので有理点と整点は区別される．Remark の 1 に述べた理由から $C(\mathbf{Z}_p)$ 上の積分を考えることにする．

Lemma 8.1 1. Pell 曲線 $C : x^2 - \Delta y^2 = 4$ 上の微分形式 $\omega = \frac{dx}{y}$ は gauge form である．

2. 上の ω は平行移動に関し不変である．

Proof.

1. $\{y \neq 0\}$ において ω が正則かつ 0 でないことは明らか．$y = 0$ すなわち $P = (\pm 2, 0)$ において正則かつ 0 でないことを確かめればよい．この 2 点では局所座標として y がとれる．$\frac{dx}{y} = \frac{1}{y}\frac{dx}{dy}dy$．関係式 $x^2 - \Delta y^2 = 4$ より $\frac{1}{y}\frac{dx}{dy} = \frac{\Delta}{x} = \frac{\Delta}{\sqrt{4+\Delta y^2}}$ であるから，$y = 0$ の近傍において正則かつ 0 ではない．

2. $P_0 = (x_0, y_0)$ に関する平行移動 $P \mapsto P + P_0$ を考える．$P = (x, y)$ と置くと $P + P_0 = (\frac{xx_0 + \Delta yy_0}{2}, \frac{xy_0 + yx_0}{2})$.

$$\omega(P + P_0) = \frac{d(\frac{xx_0+\Delta yy_0}{2})}{\frac{xy_0+yx_0}{2}} = \frac{d(xx_0 + \Delta yy_0)}{xy_0 + yx_0} = \frac{x_0 dx + \Delta y_0 dy}{xy_0 + yx_0}.$$

$dy = \frac{xdx}{\Delta y}$ を代入すると，

$$\frac{x_0 dx + \Delta y_0 dy}{xy_0 + yx_0} = \frac{(x_0 + \Delta y_0 \frac{x}{\Delta y})dx}{xy_0 + yx_0} = \frac{dx}{y} = \omega(P).$$

Q.E.D.

次節で上記 ω の積分を計算する．

8.3 Pell 曲線のファッジ因子

完備局所体上の楕円曲線に対する完全列

$$0 \longrightarrow E_1(K) \longrightarrow E_0(K) \longrightarrow \tilde{E}(k) \longrightarrow 0$$

$(E_1(K) := \ker(\mathrm{red} : E(K) \to \tilde{E}(k))$ に対応するものを Pell 曲線に対し構成する．

C の reduction $C \bmod p$（以下 $\tilde{C}$ とかく）の形態や有理点の個数は L 関数の計算の際に調べたが，それによれば $\tilde{C}$ は $p=2$ かつ $2 \mid \Delta$ の場合を除き smooth であった．従ってこのとき $\tilde{C}_{ns} = \tilde{C}, C_0(\mathbf{Z}_p) = C(\mathbf{Z}_p)$ であり，完全列

$$0 \longrightarrow C_1(\mathbf{Z}_p) \longrightarrow C(\mathbf{Z}_p) \longrightarrow \tilde{C}(\mathbf{F}_p) \longrightarrow 0$$

が成立する（全射性，すなわち解が延長されることは $\tilde{C}$ の非特異性及び Hensel の補題から従う）．これを用いて積分 $\int_{C(\mathbf{Z}_p)} |\omega|$ の計算を行う．

完全列より $[C(\mathbf{Z}_p) : C_1(\mathbf{Z}_p)] = \sharp\tilde{C}(\mathbf{F}_p)$．$\omega$ の不変性より $\int_{C(\mathbf{Z}_p)} |\omega| = \sharp\tilde{C}(\mathbf{F}_p) \cdot \int_{C_1(\mathbf{Z}_p)} |\omega|$．$\sharp\tilde{C}(\mathbf{F}_p)$ は計算済なので $\int_{C_1(\mathbf{Z}_p)} |\omega|$ を計算すればよい．

Lemma 8.2 $\underline{p \neq 2 \text{ のとき}}$，$p\mathbf{Z}_p$ と $C_1(\mathbf{Z}_p)$ の間の全単射

$$p\mathbf{Z}_p \ni y \mapsto (x(y), y) \in C_1(\mathbf{Z}_p)$$

が存在する．

Proof. $y \in p\mathbf{Z}_p$ を固定する．$f(x,y) = x^2 - \Delta y^2 - 4$ と置き，その係数を $\bmod p$ したものを $\tilde{f}$ とする．$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(2,0) = 4 \neq 0 (\because p \neq 2)$ より，Hensel の補題から

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ x \bmod p = 2 \end{cases}$$

をみたす $x \in \mathbf{Z}_p$ が一意的に存在する．この x を $x(y)$ と置くと $(x(y), y) \in C_1(\mathbf{Z}_p)$ であり，$y \mapsto (x(y), y)$ は全単射である．

Q.E.D.

Lemma より，$p \neq 2$ とすると

$$\int_{C_1(\mathbf{Z}_p)} |\omega| = \int_{p\mathbf{Z}_p} |\omega(y)dy| = \int_{p\mathbf{Z}_p} \left|\frac{\Delta}{x}\right|_p (dy)_p = |\Delta|_p \int_{p\mathbf{Z}_p} \frac{1}{|x|_p}(dy)_p.$$

$x \in 2 + p\mathbf{Z}_p$ より $|x|_p = 1$ なので

$$|\Delta|_p \int_{p\mathbf{Z}_p} \frac{1}{|x|_p}(dy)_p = |\Delta|_p \int_{p\mathbf{Z}_p} (dy)_p = \frac{|\Delta|_p}{p}$$

従って

$$\int_{C_1(\mathbf{Z}_p)} |\omega| = \begin{cases} p^{-1} & (p \nmid \Delta) \\ p^{-2} & (p \mid \Delta). \end{cases}$$

$$\sharp(\tilde{C}(\mathbf{F}_p)) = \begin{cases} p - \left(\frac{\Delta}{p}\right) & (p \nmid \Delta) \\ 2p & (p \mid \Delta) \end{cases}$$

とあわせれば,

$$\int_{C(\mathbf{Z}_p)} |\omega| = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\Delta}{p}\right)p^{-1} & (p \nmid \Delta) \\ 2p^{-1} & (p \mid \Delta). \end{cases}$$

次に $p=2$ の場合を考察する．

$p=2$ のとき，reduction は $2\nmid\Delta$ のとき非特異二次曲線，$2\mid\Delta$ のとき二本の重複したアフィン直線になる．後者の場合 $\tilde{C}$ は被約ではなくなるが，これを二次曲線が退化したものとみなし，重複度をこめて考えることにする．この場合 $\tilde{C}(\mathbf{F}_2)$ の各元（2 つ）は特異点であり，$p\neq 2$ のときのように必ずしも $C(\mathbf{Z}_2)$ に延長されるとは限らない．すなわち，列 $C(\mathbf{Z}_2)\to\tilde{C}(\mathbf{F}_2)$ が全射とは限らず，個別に確かめる必要がある．

まずは，先程と同様積分 $\int_{C_1(\mathbf{Z}_2)}|\omega|$ を計算することにする．そのために，これも先程と同様，$C_1(\mathbf{Z}_2)$ のパラメトライズを考える．これには次の一般化された Hensel の補題を用いる．

Propostion 8.1 (一般化された Hensel の補題) R を完備離散付置環（付置 v），$f(x)\in R[x]$ を monic 多項式とする．$a\in R$ が $v(f(a))>2v(f'(a))$ を満たすならば，これは $f(x)=0$ の解に延長される．

場合分けをして計算する．

- $2\mid\Delta$ のとき

  定義方程式は $x^2-\frac{\Delta}{4}y^2=1$ である.$x^2-\Delta y^2=4$ 上の gauge form $\omega=\frac{dx}{y}$ のこの曲線への引き戻しは $2\frac{dx}{y}$ であるからこれの積分をとる．$\tilde{C}(\mathbf{F}_2)$ の単位元は $(x,y)=(1,0)$ であるから，$C_1(\mathbf{Z}_2)=\{(x,y)\in C(\mathbf{Z}_2);x\equiv 1(\bmod 2)),y\equiv 0(\mathrm{mod}2)\}$ である．$y=2y'$ とおけば $x^2-\Delta y'^2=1$ を得る．$\frac{\Delta}{4}$ mod 4 の値で場合分けをする．

  - $\frac{\Delta}{4}\equiv 2(\mathrm{mod}4)$ のとき

    $y_0'\in\mathbf{Z}_2$ を固定し $f(x):=x^2-\Delta y_0'-1$ とおく.f mod $8=x^2-1$ は ± 1 mod 8 を解にもつ．また，$f'(x)=2x$ より $\mathrm{ord}_2(f'(\pm 1))=\mathrm{ord}_2(\pm 2)=1$ であるから Hensel の補題により 2 解はそれぞれ $f(x)=0$ の解に延長される．

$$\begin{aligned}\int_{C_1(\mathbf{Z}_2)}|2\frac{dx}{y}|&=2\cdot\int_{2\mathbf{Z}_2}\left|\frac{\Delta}{2x}\right|_2(dy)_2\\&=4|\Delta|_2\cdot\int_{2\mathbf{Z}_2}(dy)_2=\underline{2|\Delta|_2}\end{aligned}$$

  - $\frac{\Delta}{4}\equiv 3(\mathrm{mod}4)$ のとき

    $y'\in 2\mathbf{Z}_2$ のとき，$y'=2y''$ とおくと $x-4\Delta y''^2=1$．mod8 をとると $x^2\equiv 1(\mathrm{mod}8)$ となり，上と同様の議論により 2 つの解をもつ．$y'\in 1+2\mathbf{Z}_2$ のとき，$y'=1+2y''$ とおけば $x^2-\Delta(1+4y''+4y''^2)=1$．mod8 をとると $x^2-\Delta\equiv 1(8)\Leftrightarrow x^2\equiv 1+\Delta\equiv 5(8)$（解なし）．以上より

$$\begin{aligned}\int_{C_1(\mathbf{Z}_2)}|2\frac{dx}{y}|&=2\cdot\int_{4\mathbf{Z}_2}\left|\frac{\Delta}{2x}\right|_2(dy)_2\\&=4|\Delta|_2\cdot\int_{4\mathbf{Z}_2}(dy)_2=\underline{|\Delta|_2}\end{aligned}$$

- $2\nmid\Delta$ のとき

  定義方程式は $x^2+xy+\frac{1-\Delta}{4}=1$ である．$x^2+\Delta y^2=4$ 上の gauge form$\omega=\frac{dx}{y}$ のこの方程式への引き戻しは $\frac{2dx+dy}{y}$ であるからこれの積分をとる．先ほどと同様 $C_1(\mathbf{Z}_2)=\{(x,y)\in C(\mathbf{Z}_2);x\equiv 1(\mathrm{mod}2)),y\equiv 0(\mathrm{mod}2)\}$.
  $f(x,y)=x^2+xy+\frac{1-\Delta}{4}-1$ とおく．$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+\frac{1-\Delta}{2}y$ より $\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(1,0)=1\neq 0$．よって $(1,0)$ の局所座標として x がとれ，全単射 $1+2\mathbf{Z}_2\ni x\mapsto(x,y(x))\in C_1(\mathbf{Z}_2)$ が成立する．

$$\int_{C(\mathbf{Z}_2}\left|\frac{2dx+dy}{y}\right|=\int_{1+2\mathbf{Z}_2}\left|\frac{2dx+\frac{dy}{dx}}{y}\right|_2(dx)_2$$

ここで $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+\frac{1-\Delta}{2}y}$ を代入すれば

$$\begin{aligned}\int_{1+2\mathbf{Z}_2}\left|\frac{2dx+\frac{dy}{dx}}{y}\right|(dx)_2 &= \int_{1+2\mathbf{Z}_2}\left|\frac{-\Delta}{x+\frac{1-\Delta}{2}y}\right|_2(dx)_2\\ &= \int_{1+2\mathbf{Z}_2}\frac{|\Delta|_2}{|x+\frac{1-\Delta}{2}y|_2}(dx)_2\\ &= \int_{1+2\mathbf{Z}_2}(dx)_2=\underline{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

以上をまとめると，

$$\int_{C_1(\mathbf{Z}_2)}|\omega|=\begin{cases}2|\Delta|_2 & (\frac{\Delta}{4}\equiv 2(\mathrm{mod}4))\\ |\Delta|_2 & (\frac{\Delta}{4}\equiv 3(\mathrm{mod}4))\\ \frac{1}{2} & (2\nmid\Delta)\end{cases}$$

次に $2\mid\Delta$ のときの 4 射 $C(\mathbf{Z}_2)\to\tilde{C}(\mathbf{F}_2)$ の挙動を調べる．

$$\tilde{C}(\mathbf{F}_2)=\begin{cases}\{(1,0),(1,1)\} & \frac{\Delta}{4}\equiv 2(\mathrm{mod}4)\\ \{(1,0),(0,1)\} & \frac{\Delta}{4}\equiv 3(\mathrm{mod}4)\end{cases}$$

であるから，それぞれ $(1,1),(0,1)$ が拡張されるか否かを確かめればよい．

Lemma 8.3 $\frac{\Delta}{4}\equiv 2(\mathrm{mod}4)$ のとき $(1,1)$ は拡張されず，$\frac{\Delta}{4}\equiv 3(\mathrm{mod}4)$ のとき $(0,1)$ は拡張される．

Proof.

- $\frac{\Delta}{4}\equiv 2(\mathrm{mod}4)$ のとき
  $(x,y)\in C(\mathbf{Z}_2)$ の reduction を $(1,1)$ と仮定する．すなわち $x\equiv y\equiv 1(\mathrm{mod}2)$．特に $x^2\equiv y^2\equiv 1(\mathrm{mod}4)$ である．$x^2-\frac{\Delta}{4}y^2=1$ の mod4 をとると $1-3\cdot 1\equiv 1\Leftrightarrow -2\equiv 1(\mathrm{mod}4)$ となり矛盾．

- $\frac{\Delta}{4}\equiv 3(\mathrm{mod}4)$ のとき
  $x^2-\frac{\Delta}{4}y^2\equiv 1(\bmod 8)$ を考える．$\frac{\Delta}{4}\equiv 3(\bmod 8)$ のとき方程式は $x^2-3y^2\equiv 1(\bmod 8)$ となる．この解 $(x,y)=(2,1)$ は $C(\mathbf{Z}_2)$ に延長され，その reduction は $(0,1)$ である．$\frac{\Delta}{4}\equiv 7(\mathrm{mod}8)$ のとき方程式は $x^2+y^2\equiv 1(\mathrm{mod}8)$ となる．この解 $(x,y)=(0,1)$ は $C(\mathbf{Z}_2)$ に延長され，その reduction は $(0,1)$ である．よっていずれの場合も $(0,1)$ を reduction にもつ点が存在する．

Q.E.D.

以上の結果から全空間における積分 $\int_{C(\mathbf{Z}_2)}|\omega|$ が以下のように計算される．

$$\int_{C(\mathbf{Z}_2)}|\omega|=\sharp\tilde{C}(\mathbf{F}_2)\cdot\int_{C_1(\mathbf{Z}_2)}|\omega|=\begin{cases}1\cdot 2|\Delta|_2=2|\Delta|_2 & (\frac{\Delta}{4}\equiv 2(\mathrm{mod}4))\\ 2\cdot|\Delta|_2=2|\Delta|_2 & (\frac{\Delta}{4}\equiv 3(\mathrm{mod}4))\\ (2-(\frac{\Delta}{2}))\cdot\frac{1}{2}=1-(\frac{\Delta}{2})2^{-1} & (2\nmid\Delta).\end{cases}$$

$p\neq 2$ の結果も合わせると，結局

$$\int_{C(\mathbf{Z}_p)}|\omega|=\begin{cases}2|\Delta|_p & (p\mid\Delta)\\ 1-(\frac{\Delta}{p})p^{-1} & (p\nmid\Delta).\end{cases}$$

以上の計算結果から次の定理を得る．

Theorem 8.1 (Pell 曲線のファッジ因子の値) Pell 曲線 C のファッジ因子 c_p は

$$c_p=\begin{cases}1 & (p\nmid\Delta)\\ 2|\Delta|_p & (p\mid\Delta)\end{cases}$$

である．

9 Pell 曲線における BSD 予想の類似

9.1 玉河測度

V を大域体 k 上の非特異多様体，ω を k 上定義された gauge form とする．各素点 v に対し ω の積分から定まる測度を ω_v とかく．

Definition 9.1 (convergence factors) k の素点集合で index 付けされた正数の族 $(\lambda_v)_v$ は，$\prod_{p:\mathrm{finite}} \lambda_p^{-1} \int_{V(\mathfrak{o}_p)} \omega_p$ が絶対収束するとき V の convergence factors と呼ばれる．

ω' をほかの gauge form とすると，ほとんどすべての素点に対し $\int_{V(\mathfrak{o}_p)} \omega_p = \int_{V(\mathfrak{o}_p)} \omega'_p$ が成り立つので上の定義は ω に依存しない．

Definition 9.2 (玉河測度) ω を V の k 上定義された gauge form，$(\lambda_v)_v$ を V の convergence factors とする．素点の有限集合 S に対し $\prod_{v\in S} V_{k_v} \times \prod_{p\notin S} V_{\mathfrak{o}_p}$ 上に積測度 $\mu_k^{-\dim V} \prod_v (\lambda_v^{-1}\omega_v)$ が定まり，これから $V(\mathbf{A}_k)$ 上の測度が定まる．これを $\omega, (\lambda_v)$ が定める玉河測度と呼び，$\Omega = (\omega, (\lambda_v))$ と表す．

ここで μ_k は $\mathbf{A}_k/k$ の volume であり

$$\mu_k = \begin{cases} \sqrt{\Delta_k} & (k: \text{代数体}) \\ q^{g-1} & (k: \text{有限体上の一変数代数関数体}) \end{cases}$$

である．

Remark 9.1 V が代数群で ω が左不変のときは Ω も左不変となる．

9.2 Pell 曲線の玉河数

Definition 9.3 (代数トーラス) 閉体上 $\mathbf{G}_m^d$ と同型になる代数群を代数トーラスと呼ぶ．また体 k 上の代数トーラス T に対し $T \otimes_k K \simeq \mathbf{G}_{m,K}^d$ となる拡大体 K/k を T の分解体と呼ぶ．

Lemma 9.1 Pell 曲線 $C/\mathbf{Q}$ は $k = \mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ 上分解する代数トーラスである．

Proof. $\mathbf{Q}$ 上の代数群の完全列

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbf{G}_{m,\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\text{diagonal}} & R_{k/\mathbf{Q}}\mathbf{G}_{m,k} & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 1 \\ & & x & \longrightarrow & (x,x) & & & & \\ & & & & \alpha & \longrightarrow & \alpha\bar{\alpha}^{-1} & & \end{array}$$

を考える．ただし $R_{k/\mathbf{Q}}$ は定義体の制限を表す．これに k をテンソル（係数拡大）すると

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbf{G}_{m,\mathbf{Q}} \otimes k & \longrightarrow & (R_{k/\mathbf{Q}}\mathbf{G}_{m,k}) \otimes k & \longrightarrow & C \otimes k & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \| & & & & \\ & & \mathbf{G}_{m,k} & & \mathbf{G}_{m,k}^2 & & & & \\ & & x & \longrightarrow & (x,x) & & & & \end{array}$$

$D \subset \mathbf{G}_{m,k}^2$ を対角集合とすると，直積分解 $D \times \mathbf{G}_{m,k} \simeq \mathbf{G}_{m,k}^2, ((x,x),y) \to (x,xy)$ が成り立つ．従って

$$C \otimes k \simeq (D \times \mathbf{G}_{m,k})/D \simeq \mathbf{G}_{m,k}.$$

Q.E.D.

代数トーラスの一般論に従って Pell 曲線の玉河数 $\tau(C)$ を定義する．

p 進積分の計算結果から $p \nmid \Delta$ に対し $L_p(C,1) \cdot \int_{C(\mathbf{Z}_p)} \omega_p = 1$ が成立する．よって

$$c_v := \begin{cases} L_p(C,1) & (p: 素数) \\ 1 & (v:\infty) \end{cases}$$

は C の convergence factors である．これを canonical convergence factors と呼ぶ．

以下で見るように $C(\mathbf{A_Q})/C(\mathbf{Q})$ はコンパクトで，積分 $\int_{C(\mathbf{A_Q})/C(\mathbf{Q})}(\omega,(c_v))$ は有界となる．この値を用いて，玉河数は以下のように定義される．

Definition 9.4 (Pell 曲線の玉河数) Pell 曲線 C に対し

$$\tau(C) := L(C,1)^{-1} \cdot \int_{C(\mathbf{A_Q})/C(\mathbf{Q})}(\omega,(c_v))$$

を C の玉河数と呼ぶ．

ここで $L(C,1)$ で割るのは，canonikal convergence factors を掛けた分をキャンセルするためである．従ってこの値はアデール商 $C(\mathbf{A_Q})/C(\mathbf{Q})$ の体積だと解釈できる．

Theorem 9.1 $C(\mathbf{A_Q})/C(\mathbf{Q}) \cdot U \quad (U = C(\mathbf{R})\prod_p C(\mathbf{Z}_p))$ は有限である．

この商群は代数体のイデアル類群 $Cl(k) = \mathbf{A}_k^\times/k^\times \cdot k_\infty^\times \prod_p \mathfrak{o}_p^\times$ に相当するものであり，定理は類数の有限性定理に対応する．

Definition 9.5 $h_C := [C(\mathbf{A_Q}) : C(\mathbf{Q}) \cdot U]$ を C の類数と呼ぶ．

ここで群同型

$$C(\mathbf{A_Q})/C(\mathbf{Q}) \simeq (C(\mathbf{A_Q})/C(\mathbf{Q}) \cdot U)/(C(\mathbf{Q}) \cdot U/C(\mathbf{Q}))$$

が成立する．$C(\mathbf{Z}) = C(\mathbf{Q}) \cap U$ より $C(\mathbf{Q}) \cdot U/C(\mathbf{Q}) \simeq \big(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z})\big) \times \prod_p C(\mathbf{Z}_p)$．以下で見るように $C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z})$ はコンパクトなので $C(\mathbf{Q}) \cdot U/C(\mathbf{Q})$ はコンパクトである．類数の有限性から $C(\mathbf{A_Q})/C(\mathbf{Q})$ もコンパクトであり，

$$\begin{aligned} vol(C(\mathbf{A_Q})/C(\mathbf{Q})) &= h_C \cdot vol(C(\mathbf{Q}) \cdot U/C(\mathbf{Q})) \\ &= h_C \cdot vol(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z})) \cdot \prod_p vol(C(\mathbf{Z}_p)) \end{aligned}$$

が成り立つ．これを玉河数の定義式に代入すると以下を得る．

Theorem 9.2

$$L(C,1) = \frac{vol(C(\mathbf{A_Q})/C(\mathbf{Q}))}{\tau(C)} = \frac{h_C \cdot vol(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z})) \cdot \prod_p vol(C(\mathbf{Z}_p))}{\tau(C)}.$$

ここで大域体上の代数トーラス一般に対して成り立つ次の定理を使用する．

Theorem 9.3 (小野の公式) 大域体上の代数トーラス T に対し

$$\tau(T) = \frac{\sharp \mathrm{Pic}(T)}{\sharp Ш(T)}$$

が成り立つ．ここで $\mathrm{Pic}(T)$ は T の Picard 群，$Ш(T) := \ker\{H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), T(\bar{k})) \to \prod_{v:\mathrm{place}} H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k_v}/k_v), T(\bar{k_v})\}$ は T の Tate-Shafarevich 群である．

この公式は殆どの線形代数群に対して確認されている．アーベル多様体も含めた一般の代数群 G に対してこの公式が成り立つという予想（ただし Pic を $\mathrm{Pic}_{\mathrm{tors}}$ に変更する）を「玉河数予想」という．Pell 曲線は代数トーラスであるから小野の公式を適用できる．$(*)$ に公式を代入すると

$$L(C,1) = \frac{h_C \cdot vol(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z})) \cdot \prod_p vol(C(\mathbf{Z}_p))}{\sharp \mathrm{Pic}(C)} \sharp Ш(C).$$

こうして Pell 曲線の L 関数の特殊値を C の不変量で表現できた．これが BSD 予想の類似であることを確認する．

· $\prod_p vol(C(\mathbf{Z}_p))$
これは以前定義したファッジ因子の積 $\prod_p c_p$ であり，楕円曲線のファッジ因子の積と完全に対応する．

· $vol(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z}))$
これは $\Omega = \int_{E(\mathbf{R})} \omega = vol(E(\mathbf{R}))$ に対応する．

· $\mathrm{Pic}(C)$
楕円曲線 E/k においては，その双対性から $\mathrm{Pic(E)}_{\mathrm{tors}} = \mathrm{Pic}^0(E)_{\mathrm{tors}} \simeq E(k)_{\mathrm{tors}}$ が成り立つので，Pic(C) は $E(k)_{\mathrm{tors}}$ と対応すると考えられる．

Remark 9.2 1. 残った不変量は Pell 曲線の類数 h_c と楕円曲線の regulator$R$ だが，これらに直接的な対応は見出せない．

2. $\Delta < 0$ のとき $C(\mathbf{R})$ はコンパクトであり，$\mathrm{vol}\Big(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z})\Big) = \frac{\mathrm{vol}(C(\mathbf{R}))}{\sharp(C(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}})}$．従って

$$L(C,1) = \frac{h_C \cdot vol(C(\mathbf{R})) \cdot \prod_p c_p}{\sharp C(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}} \sharp \mathrm{Pic}(C)} \sharp Ш(C)$$

となり，BSD 予想

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^{-r} L(E,s) = \frac{R \cdot vol(E(\mathbf{R})) \cdot \prod_p c_p}{\sharp E(\mathbf{Q})_{\mathrm{tors}} \sharp \mathrm{Pic}(E)_{\mathrm{tors}}} \sharp Ш(E)$$

との類似性がよりはっきりする．

9.3 Dirichlet の公式の導出

前節で導いた公式から $L(1,\chi) = L(C,1)$ を計算し Dirichlet の公式を導く．右辺の因子を一つ一つ計算していく．

· $\prod_{p|\Delta} vol(C(\mathbf{Z}_p))$ の計算
既に計算したように $vol(C(\mathbf{Z}_p)) = 2|\Delta|_p$．よって $\prod_{p|\Delta} vol(C(\mathbf{Z}_p)) = \underline{2^t|\Delta|^{-1}}$　(t : Δを割る素数の個数)．

· $vol\Big(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z})\Big)$ の計算

Lemma 9.2

$$vol\big(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z})\big) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{|\Delta|} & (\Delta < 0) \\ 2\frac{h_k}{h_k^+}\log \epsilon_0 \sqrt{\Delta} & (\Delta > 0). \end{cases}$$

ただし $\omega = \sharp(\mathfrak{o}_k^\times)_{\mathrm{tors}}, \epsilon_0 > 1$ は基本単数である．

Proof.

· $\Delta < 0$ のとき
$C(\mathbf{R})$ は楕円であり，コンパクト．よって ω の不変性から $vol\big(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z})\big) = \frac{vol(C(\mathbf{R}))}{\sharp C(\mathbf{Z})} = \frac{vol(C(\mathbf{R}))}{\omega}$．従って $vol(C(\mathbf{R}))$ を計算すればよい．$C(\mathbf{R})$ は $(x,y) = (2\cos t, \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\sin t)$　$(0 \le t < 2\pi)$ とパラメータ付けされ，

$$\begin{aligned} vol(C(\mathbf{R})) &= \int_{C(\mathbf{R})} \Big|\frac{dx}{y}\Big| = \int_0^{2\pi} \Big|\frac{1}{y}\frac{dx}{dt}\Big| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Big|\frac{-2\sin t}{\frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\sin t}\Big| dt = \sqrt{|\Delta|}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\sqrt{|\Delta|} \end{aligned}$$

よって $\underline{vol\big(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z})\big) = \frac{2\pi\sqrt{|\Delta|}}{\omega}}$.

・$\Delta > 0$ のとき

$C(\mathbf{R})$ は双曲線であり，この上 $C(\mathbf{Z})$ が格子状に並んでいる．$vol(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z}))$ は隣り合う格子点に挟まれた区間上の積分値である．$C(\mathbf{R})$ は双曲線関数により $(x,y) = (2\cosh t, \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\sinh t)$ とパラメータづけされる．ここで，単数 ϵ で $N\epsilon = 1, \epsilon > 1$ を満たす最小のものをとる．$\epsilon = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{\Delta}$ と置くと ϵ は $C(\mathbf{R})$ の点 (a,b) に対応し $(2,0)$ と隣り合う．この区間で積分を行う．

$$\begin{aligned} vol(C(\mathbf{R})) &= \int_2^a \Big|\frac{dx}{y}\Big| = \sqrt{\Delta}\int_0^{t_0}\Big|\frac{1}{y(t)}\frac{dx}{dt}\Big|dt \\ &= \int_0^{t_0}\Big|\frac{2\sinh t}{\frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\sinh t}\Big|dt == \sqrt{|\Delta|}\int_0^{t_0} dt = \sqrt{|\Delta|}t_0 \end{aligned}$$

ここで t_0 は $x(t) = a$ を満たす t の値である．すなわち，$2\frac{e^{t_0}+e^{-t_0}}{2} = a \Leftrightarrow (e^{t_0})^2 - ae^{t_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow t_0 = \log\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2} = \log\frac{a+\sqrt{\Delta}b}{2} = \log\epsilon$ なので $t_0 = \log\epsilon$．よって $vol(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z})) = \sqrt{\Delta}\log\epsilon$.

基本単数を ϵ_0 と置くと

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_0^2 & (N\epsilon_0 = -1, h_k^+ = h_k) \\ \epsilon_0 & (N\epsilon_0 = 1, h_k^+ = 2h_k) \end{cases}$$

が成立するので，基本単数を用いて表現すれば $vol(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z})) = \underline{2\frac{h_k}{h_k^+}\sqrt{\Delta}\log\epsilon_0}$ と書ける．

Q.E.D.

・<u>Ш(C) の計算</u>

これが 1 であることはすでに言及した.

・<u>$\sharp\mathrm{Pic}(C)$ の計算</u>

Propostion 9.1 $\sharp\mathrm{Pic}(C) = 2$.

Proof. $G := \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}), \hat{C} := \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg.group}}(C, \mathbf{G}_m)$(指標群) とおく．指標群には，像への作用により G が右から作用する．代数トーラスに対しては $\sharp\mathrm{Pic}(C) = H^1(G, \hat{C})$ が成り立つ ([5]) ので右辺の Galois cohomology を計算する．$\mathbf{Q}$ 上の代数群の完全列

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_{m,\mathbf{Q}} \xrightarrow{\text{diagonal}} R_{k/\mathbf{Q}}\mathbf{G}_{m,k} \longrightarrow C \longrightarrow 1$$

から指標群の完全列

$$1 \longrightarrow \hat{C} \longrightarrow R_{k/\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{G}}_{m,k} \longrightarrow \hat{\mathbf{G}}_{m,\mathbf{Q}} \longrightarrow 1$$

を得る．ここで

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{G}}_{m,\mathbf{Q}} & \xleftarrow{\simeq} & \mathbf{Z} \\ (x \mapsto x^n) & \longleftarrow & n \end{array}$$

であり $\mathbf{Z} \curvearrowleft G$ は自明．また

$$\begin{array}{ccc} R_{k/\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{G}}_{m,k} & \xleftarrow{\simeq} & \mathbf{Z}^2 \\ \big((x,y) \mapsto (x+\sqrt{\Delta}y)^a(x-\sqrt{\Delta}y)^b\big) & \longleftarrow & (a,b) \end{array}$$

であり，G の作用は $\sigma \in G$ の $G \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(k/\mathbf{Q})$ による像を $\tilde{\sigma}$ と置くと

$$(a,b)\cdot\sigma = \begin{cases} (a,b) & (\tilde{\sigma} = 1) \\ (b,a) & (\tilde{\sigma} = -1) \end{cases}$$

となる．G-cohomology 長完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H^0(G,\hat{C}) & \longrightarrow & H^0(G,R_{k/\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{G}}_{m,k}) & \longrightarrow & H^0(G,\hat{\mathbf{G}}_{m,\mathbf{Q}}) \\ & \longrightarrow & H^1(G,\hat{C}) & \longrightarrow & H^1(G,R_{k/\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{G}}_{m,k}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

において，Hilbert's satz 90 より $H^1(G,R_{k/\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{G}}_{m,k})=1$．従って

$$H^1(G,\hat{C})\simeq \mathrm{Coker}\big(H^0(G,R_{k/\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{G}}_{m,k})\to H^0(G,\hat{\mathbf{G}}_{m,\mathbf{Q}})\big)$$

が成立する．$H^0(G,R_{k/\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{G}}_{m,k})=\{(a,a);a\in\mathbf{Z}\}$ であり (a,a) の $H^0(G,\hat{\mathbf{G}}_{m,\mathbf{Q}})$ への引き戻しは $2a$ である．従って $H^1(G,\hat{C})\simeq \mathrm{Coker}\big(H^0(G,R_{k/\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{G}}_{m,k})\to H^0(G,\hat{\mathbf{G}}_{m,\mathbf{Q}})\big)\simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$．$\therefore \sharp\mathrm{Pic}(C)=2$.

Q.E.D.

· <u>h_C の計算</u>

Propostion 9.2 $h_C=\sharp(Cl^+(k)^2)$.

Proof. 先程と同じ完全列

$$1\longrightarrow \mathbf{G}_{m,\mathbf{Q}}\xrightarrow{\text{diagonal}} R_{k/\mathbf{Q}}\mathbf{G}_{m,k}\longrightarrow C\longrightarrow 1$$

を考える．これから完全列

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbf{Q}^\times & \longrightarrow & k^\times & \longrightarrow & C(\mathbf{Q}) & \longrightarrow & 1, \\ 1 & \longrightarrow & \mathbf{R}^\times & \longrightarrow & k^\times\otimes\mathbf{R}=\mathbf{R}(\sqrt{\Delta})^\times & \longrightarrow & C(\mathbf{R}) & \longrightarrow & 1, \\ 1 & \longrightarrow & \mathbf{Q}_p^\times & \longrightarrow & k^\times\otimes\mathbf{Q}_p=\mathbf{Q}_p(\sqrt{\Delta})^\times & \longrightarrow & C(\mathbf{Q}_p) & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

を得る．特に k の狭義イデアル類群 $Cl^+(k)=k_{\mathbf{A}}^\times/k^\times U^+(U^+:=k_\infty^{\times +}\cdot\prod_{\mathfrak{p}}U_{\mathfrak{p}})$ から C の類群 $Cl(C)=C_{\mathbf{A}}/C_{\mathbf{Q}}U$ への全射

$$\alpha: Cl^+(k)\to Cl(C)$$

が誘導される．$\ker\alpha$ の位数を求めるためにまず各素点で α の様子を見る．

· p が完全分解のとき
$k^\times\otimes\mathbf{Q}_p$ において素元は $p=\pi\bar{\pi}$ と分解する．

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbf{Q}_p^\times & \longrightarrow & k_\pi^\times\times k_{\bar{\pi}}^\times & \xrightarrow{\alpha} & C(\mathbf{Q}_p) & \longrightarrow & 1 \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ 1 & \longrightarrow & U_p & \longrightarrow & U_\pi\times U_{\bar{\pi}} & \longrightarrow & C(\mathbf{Z}_p) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

ここで $k_\pi^\times=<\pi>\times U_\pi, k_{\bar{\pi}}^\times=<\bar{\pi}>\times U_{\bar{\pi}}$ であるが，$(\pi^n,\bar{\pi}^n)\to(\pi\bar{\pi}^{-1})^n$ は単射であり，$\ker(k_\pi^\times\times k_{\bar{\pi}}^\times\to C(\mathbf{Z}_p))=U_\pi\times U_{\bar{\pi}}$．従ってこの素点は $\ker\alpha$ に寄与しない．

· p が分解しないとき

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbf{Q}_p^\times & \longrightarrow & k_p^\times & \xrightarrow{\alpha} & C(\mathbf{Q}_p) & \longrightarrow & 1 \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ 1 & \longrightarrow & U_p & \longrightarrow & U_{p,k} & \longrightarrow & C(\mathbf{Z}_p) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

$k_p^\times=<p>\times U_{p,k}$ だが p は $k^\times$ に属すのでこれも $\ker\alpha$ には寄与しない．

・p が分岐するとき
$k^\times \otimes \mathbf{Q}_p$ において素元は $p = \pi^2$ と分解する．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathbf{Q}_p^\times & \longrightarrow & (k_\pi^\times)^2 & \xrightarrow{\alpha} & C(\mathbf{Q}_p) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
1 & \longrightarrow & U_p & \longrightarrow & U_\pi^2 & \longrightarrow & C(\mathbf{Z}_p) & \longrightarrow & 1
\end{array}
$$

$(\pi, \pi) \to \pi\bar{\pi}^{-1} = \pi\pi^{-1} = 1$ より $\ker\big((k_\pi^\times)^2 \to C(\mathbf{Z}_p)\big) = (k_\pi^\times)^2$．これを $\mathbf{Q}_p^\times$ で割ると $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
以上より $\ker\alpha$ に寄与するのは分岐する素点だけであり，$\ker\alpha$ には $\mathbf{F}_2$ ベクトル空間の構造が入る．$\dim_{\mathbf{F}_2}(\ker\alpha) \leq t$ であり，Δ を割る素数を $l_1, \ldots, l_t, l_i = \mathfrak{l}_i^2$ と置いたときに $\mathfrak{l}_1^{a_1} \ldots \mathfrak{l}_t^{a_t} = (\alpha)(\exists\alpha : 総正) \Leftrightarrow \mathfrak{l}_1^{a_1} \ldots \mathfrak{l}_t^{a_t} \overset{+}{\sim} 1$ を満たす独立な関係式がいくつあるかという問題に帰着されるが，これが一つであることは二次体論の一般的結果である ([7])．従って $\dim_{\mathbf{F}_2}(\ker\alpha) = t - 1$. $\therefore \sharp\ker\alpha = 2^{t-1}$.

$$h_C = \sharp Cl(C) = \frac{h_k^+}{2^{t-1}} = \sharp Cl^+(k)^2.$$

Q.E.D.

以上ですべての計算が完了した．これらを代入すると Dirichlet の公式が導かれる．

・$\Delta < 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
L(C,1) &= \frac{h_C \cdot vol(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z})) \cdot \prod_p vol(C(\mathbf{Z}_p))}{\sharp\mathrm{Pic}(C)} \sharp\text{Ш}(C) \\
&= \frac{\sharp(Cl^+(k)^2) \cdot \frac{2\pi\sqrt{|\Delta|}}{\omega} \cdot \frac{2^t}{|\Delta|}}{2} \cdot 1 \\
&= \frac{2\pi\sharp(Cl^+(k)^2)2^{t-1}}{\omega\sqrt{|\Delta|}} = \underline{\frac{2\pi h_k}{\omega\sqrt{|\Delta|}}}.
\end{aligned}
$$

・$\Delta > 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
L(C,1) &= \frac{h_C \cdot vol(C(\mathbf{R})/C(\mathbf{Z})) \cdot \prod_p vol(C(\mathbf{Z}_p))}{\sharp\mathrm{Pic}(C)} \sharp\text{Ш}(C) \\
&= \frac{\sharp(Cl^+(k)^2) \cdot 2\frac{h_k}{h_k^+}\log\epsilon\sqrt{\Delta} \cdot \frac{2^t}{\Delta}}{2} \cdot 1 \\
&= \frac{\sharp(Cl^+(k)^2)2^t\frac{h_k}{h_k^+}\log\epsilon}{\sqrt{\Delta}} \\
&= \frac{2h_k^+\frac{h_k}{h_k^+}\log\epsilon}{\sqrt{\Delta}} = \underline{\frac{2\log\epsilon h_k}{\sqrt{\Delta}}}.
\end{aligned}
$$

10　終わりに

Lemmermeyer 氏は Pell 曲線の Tate-Shafarevich 群を一般の「局所と大域のずれの指標」としてではなく「有理点と整点のずれの指標」として導入し，それが $Cl^+(k)^2$ に一致すると予測した ([2])．ある意味苦し紛れのものだと思われるが，本論文の計算結果 $h_C = \sharp(Cl^+(k)^2)$ から，彼は C の類群 $Cl(C)$ を幾何学的に解釈しようとしていたことになる．

Pell 曲線 $C : x^2 - \Delta y^2 = 4$ の homogeneous space の代表元は $D : x^2 - \Delta y^2 = 4c (c \in \mathbf{Z}, \text{squarefree})$ とあらわすことができ，2-decent は $c = a \mid \Delta$ に対応する．3-decent, 更に一般の n-decent に対応する方程式を二次体の整数論と結びつけて計算出来ると推測されるが，時間の制約上考察できなかった．

イデアル類群の構造を Pell 曲線の homogeneous space の構造という幾何学的な対象に置き換えることは二次体の整数論を新しい視点から解釈するきっかけになるのではないかと思う．

また私的な感想としては，Pell 曲線の p 進積分を実際に計算してみて，退化という現象が多様体の体積を小さくするという点に魅力と不思議を感じた．

参考文献

[1] F.Lemmermeyer,*Higher decent on Pell Conics 1,2,3*, preprint.

[2] F.Lemmermeyer,*Conics-A poor man's elliptic curves*, preprint.

[3] A.Weil,*Adeles and Algebraic Groups*, Birkhauser,1982.

[4] T.Ono,*Arithmetic of algebraic tori*, Ann.of.Math.,74,1961,pp.101-139.

[5] T.Ono,*On the Tamagawa number of algebraic tori*, Ann.of.Math.,78,1963,pp.47-73.

[6] J.H.Silverman,*The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer-Verlag.

[7] 小野孝, 数論序説, 裳華房.