RECIPROCITY LAWS. FROM EULER TO EISENSTEIN

REVIEWER N. SCHAPPACHER

Im Jahre 2001 jährt sich das Erscheinen von Carl Friedrich Gauß' *Disquisitiones Arithmeticae* zum zweihundertstehn Mal. Hier und da wird das Ereignis begangen. Als ich kürzlich in Gent aus diesem Anlaß auch Eisensteins Arbeit von 1850 *Über die Irreductibilität ...* der Lemniskatengleichung erwähnte, in der Eisenstein sein bekanntes Irreduzibilitätskriterium formuliert und beweist, kam nach dem Vortrag ein Zuhörer mit Lemmermeyers Buch auf mich zu und zeigte mir darin die Fußnote auf Seite 254, derzufolge Schönemann dieses Kriterium schon 1846 in Crelles Journal publiziert hat.

Lemmermeyers Buch ist eine unerschöpfliche Fundgrube für die Geschichte der Zahlentheorie der letzten 200 Jahre (und zum Teil auch schon davor). Obwohl der Autor diesen Anspruch von sich weist, kann es durchaus die Rolle von Dicksons ungeschriebenem vierten Band der *History of Numbers* spielen: im Sinne eines Schmöker- und Nachschlagewerks für Ach! so viele *twists and turns* der zahlentheoretischen Produktion zweier Jahrhunderte im Umkreis der Reziprozitätsgesetze. Aber im Gegensatz zu Dickson kennt Lemmermeyer auch die Perspektive der heute aktuellen Forschung. Sein Vorwort etwa gelangt auf sechs Seiten bei Artins Klassenkörpertheorie an, und zwei Seiten später bei den Vermutungen von Birch und Swinnerton-Dyer.

Es geht um Reziprozitätsgesetze, also zunächst umd das berühmte von Euler entdeckte und von Gauß in den *Disquisitiones* als *theorema fundamentale* erstmalig vollständig bewiesene quadratische Reziprozitätsgesetz, das die beiden Legendresymbole zweier verschiedener ungerader Primzahlen p, q vergleicht:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{p}\right),$$

und dann weiterhin um quartische (Kap. 6), kubische (Kap. 7) und oktische (Kap. 9) Potenzreste, bis zu Eisensteins Spezialfall des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes für ℓ-te Potenzreste, wo ℓ eine Primzahl ist (S. 365). Bei Eisenstein hält das Buch ein – Lemmermeyer kündigt S. xiii einen zweiten Band an. Aber mit dieser lapidaren Liste sind die Themen aich nicht annähernd aufgezeigt, zu denen das Buch überreiches MAterial und gut ausgearbeitete Darstellungen bereithält.

So kommen die Gauß-Summen an vielen Stellen zu ihrem Recht. Kapitel 5 ist den "rationalen Reziprozitätsgesetzen" gewidmet (über Restsymbole höherer Ordnung, die jedoch nur die Werte ± 1 annehmen). Kapitel 8 über Eisensteins analytische Beweise beginnt mit einer ganz vorzüglichen Einführung in Abels lemniskatische elliptische Funktionen, in Paralleldarstellung mit dem zyklotomischen Fall, und verfolgt die Thematik bis zu Kroneckers Jugendtraum über $\mathbb{Q}(i)$. Kapitel 10 (Gauß' letzter Tagebucheintrag, Kurven über endlichen Körpern) und Kapitel 11 zu Eisensteins Reziprozitätsgesetz für ℓ-te Potenzreste beschließen das Kaleidoskop.

Die Bibliographie zum Thema Reziprozitätsgesetze am Ende des Buchs enthält 885 Title; jedes Kapitel hat eine eigene reiche Bibliographie für Verweise auf Literatur, die nicht speziell den Reziprozitätsgesetzen gewidmet ist.

Lemmermeyers Englisch ist ziemlich salopp und nicht fehlerfrei, aber soweit ich sehe stets klar verständlich.

Das Buch ist allen wärmstens zu empfehlen, die Interessse an der Zahlentheorie und ihrer Geschichte haben, und die Dinge gerne genau wissen wollen.