RECIPROCITY LAWS. FROM EULER TO EISENSTEIN

REVIEWER R. AUER

Eine ungerade Primzahl ist ein Quadrat modulo einer anderen ungeraden Primzahl, genau dann wenn dies mit vertauschten Rollen wahr ist, ausser wenn beide Primzahlen kongruent zu 3 modulo 4 sind, in welchem Falle das Gegenteil gilt. Für diese, in etwas anderer Form, zuerst von Euler formulierte Aussage über 'quadratische Reste' fand Gauss als Erster gleich acht verschiedene Beweise, weshalb sie heute auch unter dem Namen 'Gauss'sches Reziprozitätsgesetz' bekannt ist. Ahnliche Gesetze lassen sich fUr höhere Potenzreste ganzer algebraischer Zahlen aufstellen, wobei dann die entsprechenden Einheitswurzeln vorhanden sein müssen. So waren Eisenstein bereits ein kubisches, quartisches und sextisches Reziprozitätsgesetz im dritten beziehungsweise vierten Kreisteilungskörper bekannt. Auch wenn sich diese klassischen Resultate fUr den heutigen Zahlentheoretiker allesamt unter der Klassenkörpertheorie subsumieren, so ist ihre Aufarbeitung sowohl, weil sie sehr explizit sind, als auch aus historischen Gesichtspunkten interessant und sinnvoll. In dieser Hinsicht schliesst das vorliegende Buch sicherlich eine bisher vorhandene Lücke. Sein Untertitel *From Euler to Eisenstein* deutet an, dass allein elementare (d.h. algebraische Zahlen betreffende) Reziprozitätsgesetze behandelt werden. Die weitere Entwicklung von der Einführung der Ideale(n Zahlen) durch Kummer bis zur Klassenkörpertheorie nach Takagi und Artin will der Autor einem zweiten Band vorbehalten.

Vier der acht Gauss'schen Beweise werden in den ersten drei Kapiteln durchgeführt. Zu ihrem Verständnis werden Kongruenzhalbsysteme, die Genustheorie quadratischer Zahlkörper, Kreisteilungskörper und quadratische Gauss-Summen besprochen. Als Anwendung beweist der Autor den Lucas-Lehmer- Test für Mersenne'sche Primzahlen. Schliesslich wird noch der Zusammenhang zu Hilberts quadratischer Reziprozität in den rationalen Zahlen hergestellt. Danach werden das allgemeine Kummersche Potenzrestsymbol in einem algebraischen Zahlkörper sowie die höheren Gauss- und Jacobi-Summen eingeführt. Ihre Primidealzerlegung liefert dann jeweils den entscheidenden Schritt im Beweis der quartischen, kubischen, sextischen, oktischen und ℓ-ten (Eisensteinschen) Reziprozitätsgesetze, die im wesentlichen den Rest des Buches füllen. Eisensteins analytische Beweise führen den Leser zudem über Lemniskate und elliptische Funktionen bis hin zur Theorie der komplexen Multiplikation. Einen Ausflug in die arithmetische Geometrie erlaubt sich der Autor dann noch im zehnten Kapitel ausgehend van Gauss' letztem Tagebucheintrag. Hier werden die Reziprozitätsgesetze mit zyklotomischen Zahlen, dem Primzahlsatz und den Weil-Vermutungen in Zusammenhang gebracht.

Der gesamte Text, vor allem das erste Kapitel, ist angereichert mit historischen Hintergrundinformationen und Zitaten. Eine Fülle von Übungsaufgaben sollen den Leser zum Mitdenken und Mitrechnen anregen. Auffällig ist die ausführliche Literaturliste, die insgesamt mehr als 1600 Referenzen umfasst. Dem nur vierseitigen

Stichwortverzeichnis steht eine sechsseitige Chronologie von Beweisen des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und ein 16-seitiger Autorenindex gegenuber.

Trotz der vom Autor jeweils gegebenen Einführungen scheinen mir Grundkenntnisse in algebraischer Zahlentheorie zum Verständnis des Buches erforderlich zu sein. Die Darbietung des Stoffes habe ich beim Lesen als recht unübersichtlich empfunden. So manches Mal musste ich innehalten, um eine Notation oder Definition aufzusuchen, die dann entweder überhaupt nicht oder zum Beispiel in unverständlicher Form zwischen den historischen Anmerkungen eines früheren Kapitels zu finden war. Der Text weist stellenweise so viele Druckfehler und unklare Begrifflichkeiten auf, dass sein mathematischer Sinngehalt (mit bedingt durch den sehr impliziten Stil des Autors) zuweilen nur noch mit äusserster Mühe zu erschliessen ist. Es wäre zu hoffen, dass dieser Nachteil in einer zweiten Auflage behoben wird.

Nach allem ist mir nicht ganz deutlich, an welche Leserschaft sich das Buch eigentlich richtet. Zwar enthält es einige thematische Anregungen, die man in eine Vorlesung einfliessen lassen könnte, doch ist es wohl weniger als Lehrbuch denn als historisches Nachschlagewerk oder vielleicht als Schmökerlektüre für den Liebhaber geeignet. Zumindest der Rezensent hat es ja nun gelesen und dabei – auch wenn ihm das nicht immer leicht gemacht wurde – einige interessante Dinge dazugelernt.