

WIE GPS NICHT FUNKTIONIERT

F. LEMMERMEYER

Dass eingekleidete Aufgaben bisweilen den Eindruck erwecken, als würden die Aufgabensteller nur wenig von Physik verstehen, ist kein neues Phänomen. Was aber den hessischen Mathematik-Abiturenten im Jahre 2015 vorgesetzt worden ist, lässt sich mit der verzweifelten Suche nach Aufgaben, die eine gewisse Anwendungsorientierung vorgaukeln sollen, nicht mehr wirklich erklären.

1. MATHEMATIK ABITUR HESSEN 2015

Mit einem GPS-Empfänger kann man seine Position auf der Erde metergenau bestimmen. Dies geschieht mit Hilfe von Satelliten, die ihre Signale in alle Richtungen zur Erde senden. Je mehr Satelliten empfangen werden können, desto sicherer und genauer wird die Positionsbestimmung. Nimm an, dass sich der Satellit NAVSTAR momentan auf der Position $N(0|10|20.203)$ und der Satellit KOSMOS auf $K(4.309|2.801|20.513)$ befindet (alle Angaben in km). Ein GPS-Empfänger auf der Erde empfängt die Signale beider Satelliten. Das Signal von NAVSTAR wird aus Richtung des Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 25 \\ 37 \\ 1.010 \end{pmatrix}$ empfangen und das von KOSMOS aus Richtung des Vektors $\vec{w} = \begin{pmatrix} -13 \\ -7 \\ -70 \end{pmatrix}$.

- 1.1 Gib eine Gleichung der Geraden an, die von K aus in Richtung des Vektors \vec{w} verläuft, und beschreibe den Aufbau dieser Gleichung.
- 1.2 Zeige, dass sich der GPS-Empfänger auf der Position $E(500|750|3)$ befindet.
- 1.3 Berechne den Abstand des Satelliten KOSMOS zum Empfänger.
- 1.4 Berechne, in welchem Winkel zueinander die Signale beim Empfänger eintreffen.

2. DISKUSSION

Die Wahl des Koordinatensystems wird in Abituraufgaben selten thematisiert; im vorliegenden Fall ist sie natürlich wesentlich. Woher soll der GPS-Empfänger denn wissen, an welchen Positionen die Satelliten stehen, wenn sie nicht in Bezug auf ein fest definiertes Koordinatensystem gegeben sind, etwa eines, das mit den üblichen Längen- und Breitengraden (Meridian durch Greenwich) übereinstimmt.

Jetzt misst der Empfänger die Richtung, aus der die Radiowellen bei ihm eintreffen. Diese Richtungen sind messbar, jedenfalls solange nur ein Sender zu empfangen ist. Sobald jedoch zwei Sender auf der gleichen Frequenz empfangen werden, wird eine Richtungsmessung mit den heutigen Geräten unmöglich, und die Satelliten des GPS-Systems senden alle auf derselben Frequenz.

Nehmen wir aber einmal an, dass unsere GPS-Empfänger tatsächlich Richtung der Signale zweier Satelliten messen können; nehmen wir ebenfalls an, wir könnten Effekte wie Aberration und Brechung der Radiowellen an der Atmosphäre der Erde

vernachlässigen. Dann müssen wir die gemessene Richtung aber auf das Koordinatensystem beziehen, in welchem wir die Position der Satelliten kennen. Das ist kein großes Problem, wenn wir zufällig am Observatorium in Greenwich herumfahren. Wenn wir uns anderswo befinden, können wir aus der gemessenen Richtung (in bezug auf ein mitfahrendes Koordinatensystem) die Richtung im Satellitenkoordinatensystem ausrechnen, falls wir nicht nur wissen, wo genau wir uns befinden, sondern auch noch, in welcher Lage (horizontal, Nord-Süd-Richtung?) sich das Auto bei der Messung der Richtung befunden hat. Die Lage in Richtung auf die Horizontale lässt wohl noch messen, aber woher soll man wissen, wie das Auto in bezug auf Greenwich ausgerichtet ist? Ein Kompass ist viel zu ungenau (s. unten), und die Messung der Richtung des Polarsterns ist auch nicht jederzeit möglich.

Auch die Vorstellung, die beiden Geraden durch die Satelliten mit den gemessenen Richtungen würden sich schneiden, kann nur jemand haben, der von Technik nichts versteht. Wenn die Richtungen auch nur um ein Millionstel Grad von der wirklichen abweichen oder der Satellit nur einen Zentimeter von der bekannten Position entfernt ist, dann sind die Geraden windschief. In der Praxis dürfte man diese Geraden also nicht schneiden, sondern müsste die Punkte auf den beiden Geraden bestimmen, an denen diese den minimalen Abstand haben und hoffen, dass diese Punkte nicht weiter als 40 m voneinander entfernt sind.

Auf der andern Seite ist der zweite Satellit, würde das hessische GPS-Modell denn funktionieren, eigentlich überflüssig: die Gerade durch den Satelliten mit der gemessenen Richtung schneidet die Erdoberfläche in einem Punkt (genauer in zweien, aber nur in einem der beiden Punkte ist der Satellit sichtbar).

Endlich ist es so, dass die Satelliten nicht ans Himmelszelt festgeklebt sind, sondern die Erde umkreisen, und zwar mit relativ hohen Geschwindigkeiten: sie laufen in einer Höhe von 20 200 km über dem Erdboden in knapp 12 h um die Erde, haben also eine Geschwindigkeit von $v \approx \frac{2\pi(20\,200+6370)\text{ km}}{12\cdot 3600\text{ s}} \approx 3,9\text{ km/s}$. Um den Satelliten also auf etwa 40 m genau festzunageln, darf die Messung der Richtungen der beiden Satelliten maximal eine Hundertstel Sekunde dauern. Ebenso darf die Ungenauigkeit bei der Richtungsmessung nicht zu groß sein; eine Genauigkeit von 40 m auf eine Entfernung von 20 200 km kann man erreichen, wenn man die Richtung bis auf einen Winkel von etwa $\frac{1}{10\,000}^\circ$ genau messen kann: das ist in etwa eine halbe Bogensekunde und entspricht dem Winkel, den man messen muss, wenn man die Entfernung des nächsten Sterns Proxima Centauri mit Hilfe seiner Parallaxe bestimmen möchte.

Dabei ist natürlich noch zu beachten, dass dieselben Genauigkeiten für die Messung der "horizontalen" Lage des Empfängers erreicht werden müssen. Mit Hilfe der Gravitation allein ist dies nicht möglich, denn wegen der Eiform der Erde zeigt die Schwerkraft nicht an jedem Punkt der Erdoberfläche in Richtung Erdmitte.